N. Z.

Prima Edizione di quest'ope=
ra molto stimata vedi
Mondfrier Dict.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.

Coll. S. Josephi

OMNES PERSPICVIS DEmonstrationibus, accuratisq́; scholijs illustrati.

[illegible] nove

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

SERENISSIMO

PRINCIPI,

AC D. D. EMANVELI PHILIBERTO

Sabaudiæ Duci.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS SOCIETATIS IESV S. P. D.

EST profecto (quod te non fugit) Princeps Serenifs. præclara quædã res, ac plane diuina, rerum cognitio, quæ merito in optimo quoq; incredibile fui defideriũ excitat, quo facimus hæc hominũ breuis, & calamitofa uita,

 igno-

ignorantiæ quaſi tenebris diſiectis, & ad exitum ipſa ſuum perueniat, & omnia quæ accidere poſſunt, incommoda leuiora ducat. Ac ſi ea quæ ſunt a ſummis philoſophiæ principibus de liberalium artium dignitate vere ac ſapienter ſcripta, falſa eſſe non credimus; nemini dubium eſſe poteſt, quin & rerum obſcuritate, & incerta cognitione, mirum in modum minuatur illa ſiue uoluptas, ſiue animi iucunditas appellanda eſt, quæ ex ipſa alioqui rerum contemplatione percipi ſolet. Equidem fateor (quod ſummo uir ingenio dixit Ariſtoteles) eximiam quandam eſſe in naturæ perueſtigatione poſitam delectationem, rerumque naturalium ſcientiam, multis philoſophiæ partibus nobilitate præcellere: Sed quis non uideat in tanta opinionum uarietate, quarum (cum ſit unica veritas) aut non plus una ueram, aut omnes falſas eſſe neceſſe eſt, multum uel inconſtantiæ, uel errori relictum eſſe loci, quo quidem nihil eſſe poteſt a ſcientia magis alienum? Quod ſi (ut eſt apud eundem peripateticæ diſciplinæ principem) doctrinarum nobilitas tum ex rerum dignitate, tum ex elaborata probandi ratione pendet; quid de mathematicis diſciplinis exiſtimanſtimandũ eſt, quæ ut de rerũ præſtantia nihil dicam, tantam habent ſuis in rationibus firmitatem, ut non tam perſuadere, quam uim quodammodo afferre uideantur. Quotus enim quiſque eſt, qui Archimedis, & Apollonij, cæterorumque Mathematicorum libros legens acutiſſimorum hominum non admiretur ingenia, & menti ſuæ firmiſſimas quaſdam quaſi machinas admoueri non ſentiat, ut ijs quæ illi tradunt, uel inuitus aſſentiri cogatur? Qua quidem ex re dici uix poteſt, quantam animus noſter capiat voluptatem, dum ita in ſententia perſtat, remque omnem plane percipit, ac tenet, ut neutram in partem dubius inclinet, nuſquam fluctuet, nedum falſis opinionibus imbuatur. Cuius ſane tam certæ tamque accuratæ ſcientiæ, cum ſolum ac fundamentum Euclidis, quæ dicuntur, elementa communi omnium Mathematicorum conſenſu exiſtimentur; Tantam profecto ſummus ille vir apud poſteros laudem meretur, quanta optimo in primis diligentiſſimoque magiſtro, atque ipſi etiam primo artis inuentori iure debetur. Quo magis eorum probanda uidetur induſtria, qui in his ipſis elementis aut explicandis, aut illu-

 ſtrandis

ſtrandis ſtudium, atque operam collocant, ut quanto hæc mathematicarum diſciplinarum initia aut faciliora, aut firmiora fuerint, tanto quæ conſequuntur omnia planius cognoſcantur. Quæ cum ego multos annos partim publice docendo, partim priuatim commentando, & cum alijs viris doctis communicando diligentius pertractaſſem, collegiſſemque (ut fere fit) in meum priuatum uſum nonnulla, quæ ad eorum cognitionem facere uiderentur; faciendum mihi neceſſario exiſtimaui, præſertim auditorum, amicorumque meorum precibus fatigatus, præterea Laurentij Caſtellani ciuis Romani liberalitate inuitatus, qui oẽs ad id neceſſarios ſumpt⁹ benigne admodũ ſuppeditauit, ad publicã ſtudioſorum utilitatẽ, in lucem manusque hominum exire permitterem. Tibi uero potiſſimũ Princeps Sereniſſ. has meas lucubrationes dicaui, primum quod tibi Mathematicorum omnium eximio patrono hæc noſtra maxime ſtudia cordi eſſe intelligebam; deinde quod pro tua in noſtrũ ordinem uniuerſum ſingulari beneuolentia, atque promeritis aliquod tibi grati animi indicium extare ſocietas noſtra uehementer optabat. Huc accedebat priuatum etiam ſtudium in te meum, quod ab humanitate tua ſingulari, oratoriſque tui Vincentij Parpaleæ viri ampliſſimi beneuolentia prouocatus, nihilo tibi minus ego ſum priuatim obſtrictus, quam publice Societas noſtra vniuerſa. Accipe igitur hoc tenuitatis noſtræ munuſculũ, ſi rem ſpectes, exiguum illud quidem, & meritis tuis longe impar; ſin animum intuearis, amoris & obſeruantiæ pleniſſimum. Quod ſi tibi gratum iucundumq; accidiſſe cognouero, cum ſatis amplam laboris mei mercedem ac præmium me tuliſſe exiſtimabo, tum vero ad alia eiuſdem generis commentanda, & elucubranda, ſi otium & occaſio ſe offeret, efficiar alacrior. Vale.

ROMAE, KALENDIS FEBR.

M. D. LXXIIII.

LECTORI. S.

SIQVIS *forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi cõmentationes conscripserimus, is facile sibi persuadebit, non temere id a nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa, diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse utilitatem, atque adeo necessitatẽ horum elementorum, ut frustra quisquam se speret ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque* Archimedis, Apollonij, Theodosii, Menelai, Ptolomæi, *cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; uehementer dolebamus, tam insignem, & illustrem auctorem a plerisque omnino negligi, a perpaucis uero pro dignitate tractari, ita ut uix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulá operá, ac studiũ in perdiscendis his elementis ponant, ob eam potissimum, ut arbitror causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atq; obscuritate deterreantur, nullũq; habeant hac in re ducẽ, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem commentarij* Campani, *ac* Theonis *in singulos* Euclidis *libros sane eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facile con-*

sequen-

sequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, uerbaque propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, ut uerus, germanusque auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maxime in decimo libro perspicitur: Alter (Theonem intelligo) pene innumeris mendis, uitijsque incuria librariorum ita est depravatus, & propter notas græcas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas, ac male expressas adeo impeditus, ut magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, ut Euclidem sine maximo labore, ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram usque memoriam maius aliquod studium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi uel sex priores tantum libros exposuerunt, uel si qui in uniuersum Euclidem commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, (Federicum tamen Commandinum Vrbinatem Geometram peritissimum excipio, cuius opera, atque diligentia Euclides latine redditus, & in pristinum nitorem, iuxta ueterum interpretum sensum, ac traditionem, restitutus, nunc denuo prodijt in lucem,) proprias alias, ac nouas confixerunt, quæ plerunque non tam firmæ sunt, neque rem ipsam simpliciter, & absolute conficiunt; præsertim quod modo e propositionibus uoces quasdam perperam detrahūt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, ut merito de uero, proprioque Euclidis sensu dubitare quis possit. Quæ cum ita sint,

resque

resque ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt post diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, ut lucubrationes nostras, ac uigilias studiosis harum rerum nonnihil (nisi fallimur,) subsidij allaturas, in publicum ederemus. Accessit editionis causa altera: Nam cum Euclides*, propter singularem utilitatem, instar enchiridij, manibus semper debeat circumgestari, neque unquam deponi ab his, qui fructum aliquem serium ex hoc suaui Matheseos studio capere uolunt, in eoque progredi; id uero in hunc diẽ, exemplaribus omnibus maiore forma impressis, necdum factum uideamus; hoc nostra editio certe, si nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sũt enim hi nostri commentarij in uniuersum* Euclidẽ *conscripti commodiore nunc forma, quam uulgo cæteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) uolumineq; editi, ut facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, uia, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præstitum sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maxime* Theonis*; quas quidem ipsius esse* Euclidis*, non leuibus argumentis adducti quidam asseuerant, &* Proclus *etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatam licuit, uel certe planiores, quando illud non potuimus, delucidioresque reddere conati sumus. Non enim illas nude, ac totidem uerbis, quot erant scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, ut illud accidat, quod ab elegan-*

elegantissimo poeta dictum est. Breuis esse laboro, obscurus fio: Interdum etiam, cum breuius, atq; succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quam satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare utrunque uitantes, eas, uelut παραφραστικῶς, *atq; ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice* Euclidem *interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & uoluntati, quantum est in nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra sententia,* Euclides *facilius a studiosis, ijs præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore uoluptate, utilitateque cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis uaria problemata, ac theoremata, scitu non iniucunda, neque a scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, alijsque auctoribus decerpsimus, partim proprio (ut aiunt) Marte, assiduisque meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligẽs opera, ut definitiones* Euclidis, *præsertim obscuriores, & quæ aliquid uisæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam, incidentes, a recto cursu deflexerunt, & in errores uarios, atque absurdos, prorsumque ab instituto disciplinæ abhorrentes, dilapsi sunt.) dilucide, atque perspicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facile iudicabunt. Quæ res cum in ampliorẽ magnitudinẽ excrescerent, quam ut unius libri spatijs, hac præsertim forma, commode includi possent, in duas partes totam tractationem diuisimus.* Altera *nouem prioribus libris continetur: altera sex reliquos, una cum decimosexto ad comparationes*

quinque

quinq; corporũ regulariũ pertinente, quem ex Francisco Flussate Candalla adijcere uoluimus, cõplectitur. Nunc, quia hæc Euclidis elementa ostium, atque aditum ad omnes alias scientias Mathematicas reserant ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, unde nam Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint; quæ sit earum diuisio; a quibus primum ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ; quanta sit illarum præstantia, atque utilitas, & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

MATHE-

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE *Mathematicæ, quæ quidē circa quantitatem uersantur omnes, nomen acceperunt a dictione græca* μάθημα, *siue* μάθησις, *quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, uel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, qua anima nostra (ut eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, ubi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio responderit, ut puer, gradatim tamen ascendens eo deductus est, ut responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi uendicare, quod solæ modum, rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas, quod propriū est munus, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, ut & Aristoteles testatur;* (1. poster.) *neque unquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere uolunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud uero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasue nō semper obseruare uidemus, cum plerunq; in confirmationem eorum, quæ ostendere uolunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratae, adducant.*

DISCI-

DISCIPLINARVM MATHEMATICARUM diuiſio.

PYTHAGOREI, quos deinde ſecuti ſunt omnes propemodum Mathematici, atq; Philoſophi non pauci, Mathematicas diſciplinas uniuerſas in quatuor partes diſtribuerunt, Aritmethicam, Muſicam, Geometriam, ac Aſtronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam uerſantur, ſit uel diſcreta, ſub qua omnes numeri, uel cõtinua, ſub qua omnes magnitudines comprehenduntur; & utraque tam ſecundum ſe, quam comparatione alterius poſſit conſiderari; Viſum fuit illis conſentaneum, quatuor prædictas facultates inſtituere, quæ utranque quantitatem, pro duplici conſideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate diſcreta ſecundum ſe, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac paſſiones: Muſica tractat eãdem quantitatem diſcretam, ſiue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum ſonorum concentus reſpicit, atque harmoniã. Geometria de magnitudine ſiue quãtitate cõtinua, ſecundũ ſe quoq;, ut immobilis exiſtit, diſputat. Aſtronomia deniq; eandẽ magnitudinẽ, ut eſt mobilis, conſiderat; qualia ſunt cœleſtia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor ſcientias Mathematicas, quarũ Arithmetica, & Geometria puræ, Muſica uero, atq; Aſtronomia mixtæ dicunt, oẽs aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis eſt perſpectiua, Geographia, & cæteræ huiuſmodi, uel facile, ut ad capita, a quibus dependent, reduci poſſunt.

ALIA rõne a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, ut auctor eſt Proclus in cõmẽtarijs, quos in primũ Euclidis librũ edidit, Mathematicæ diſciplinæ diuidunt. Quã quidẽ diuiſionẽ, quoniã elegãter, copioſeq; docet, ad quanã ſeſe extẽdãt Mathematicæ diſciplinæ, ferme ad uerbũ ex Proclo iuxta interpretationẽ Franciſci Barocij Patricij Veneti excerptã hic ſubijcere ſtatui. Volũt itaq; prædicti auctores, ſciẽtiarũ Mathematicarũ quaſdã in intellectilibus duntaxat ab omni materia ſeparatis, quaſdam uero in ſenſi libus, ita ut attingant materiam ſenſibus obnoxiam, uerſari. Prioris generis ſtatuunt duas longe primas, præcipuaſq; ſcientias, Arithmeticam, & Geometriam: In poſteriori uero genere conſtituunt ſex, Aſtrologiam, Perſpectiuam, Geodæſiam, Canonicã ſiue Muſicam, Supputatricẽ, atq; Mecha-

Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis edisserit motibus, de corporum cælestium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonũ, exercetur: Metheoroscopica, quæ eleuationum differentias, sytderumq reperit distantias, nec non multa alia, & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumque stellarum distantias huiuscemodi dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt a Geometria gigni, atque uti radijs visorijs, tanquam lineis, et angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub uisum cadunt, alios situs, & distantias, vt parallelarum coincidentiæ, uel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionit: Et in vniuersam specularıam, quæ circa uarias, multiplicesque versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc est, vmbrarum designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesque videantur. Geodæsiam appellant eam scientiam, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos, tanquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassioribus, vt spartis, & perpendiculo. Diuiditur hæc, ut Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes concentuum considerat rationes, sensusque ubique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, ut menti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat, non vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materiæque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est: Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ *vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis idonea,*

nea, qualia ſane Archimedes etiam fertur conſtruxiſſe, Syracuſas terra, marique obſidentibus reſiſtentia; Quædam mirabilium prorſus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ dicitur, quippe quæ alia quidem ſpiritibus maximo cum artificio conſtruit, quemadmodum etiam Cteſibius, atque Heron operantur; alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, ſtatus vero æquilibrium eſſe cauſam cenſendum eſt, ut Timæus etiam determinauit; alia vero neruis, ſpartisque animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam eſt æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centroponderantia uocantur, cognitio: Quædam denique ſphærarum effectrix, quæ σφαιροποιΐα appellatur, ad cæleſtium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus eſt: Atque ut vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur ſunt diſciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad inſtruendas, coordinandasq; pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam eſſe non cenſent, vt quidã alij voluère, ſed vti eam volunt modo quidem arte ſupputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæſia, ut in diuidendis, dimetiendisque caſtrametationi ſpatijs in campo. Quemadmodum neque Hiſtoricam, neque medendi artem Mathematices partem ullam eſſe dicunt, licet ſæpenumero tum Hiſtorici, tum etiam Medici Mathematicis utantur theorematibus; Rerum quidem geſtàrum ſcriptores, vel climatum ſitus referendo, uel urbium magnitudines, & diametros, uel ambitus, circuitusve colligendo: Medici vero, quamplurimas res in arte ſua huiuſcemodi uijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Aſtrologia peruenit, ipſe etiam Hippocrates oſtendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis tẽporibus, locisque dixere. Eadem ſane ratione ille etiam, qui aciebus inſtruendis operam acccommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numeroſa eſt, pauciſſimam oſtendere multitudinem, caſtra, ſuosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum uero ad figuram quadranguli, uel quinquanguli, vel alterius cuiuſdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere ſunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum ſcientiarũ partitione reliquerunt.

INVEN-

INVENTORES MATHEMATICARUM disciplinarum.

OMNES disciplinas Mathematicas a uarijs, & diuersis auctoribus ortum, originemque duxisse, perspicue historiæ testantur: Immo uero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoriæ quoque proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commertia, ut auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq; successores, nec non Aegyptij, Græci denique ac Arabes amplificarunt, uarijsque problematis, atque theorematis illustrarunt. Musicam deinde a Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt; quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri, & Lino; Linus uero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra usque tempora manauit. Geometria uero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumque habuit ab agrorum emensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, uastaretque, ut nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, siue γεωμετρέω idem significat, quod, terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria cœpta est expoliri, & non contenta suis finibus, se se ad corpora etiam cælestia dimetienda conuertit, tradiditq; principia uniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quam plurimis, quæ ex ipsa, ueluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi, ac Mathematici plurimi, acutissimisque demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus,

dorus, Theætetus, Ariſtarchus, Eratoſthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypſicles Alexandrinus, Archimedes Syracuſius, Apollonius Pergæus, Theodoſius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Aſcalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum eſſet recenſere. Aſtronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam eſſe autumãt: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Aſtronomiæ cognitionem, exortam eſſe uolunt fabulam, illum ſuis humeris cælum ſuſtinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obſeruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) ſyderum ſcientiam adinueniſſe. Alij Aegyptios primos huius ſcientiæ faciunt inuentores: Alij Aſſyrios: Alij deniq; gloriam hanc, & laudem Babylonijs eſſe deferendam, cenſent. Hac autem in ſcientia, ut eſt præſtantiſſima, ita quoque maxime illuſtres auctores claruerunt, quod non eſt huius loci declarare. Cæterum, præcipuis hiſce quatuor diſciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipſis, tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ ſunt, atque deductæ.

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM *diſciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ abſque ulla materia ſenſibili conſiderantur, quamuis re ipſa materiæ ſint immerſæ; perſpicuum eſt, eas medium inter Metaphyſicam, & naturalem ſcientiam obtinere locum, ſi ſubiectum earum conſideremus, ut recte a Proclo probatur. Metaphyſices etenim ſubiectum ab omni eſt materia ſeiunctum & re, & ratione: Phyſices vero ſubiectum & re, & ratione materiæ ſenſibili eſt coniunctum: Vnde cum ſubiectum Mathematicarum diſciplinarum extra omnem materiam conſideretur, quamuis re ipſa in ea reperiatur, liquido conſtat, hoc medium eſſe inter alia duo. Si uero nobilitas, atque præſtantia ſcientiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus vtitur, ſit iudicanda, haud dubie Mathematicæ diſciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt diſputationem, firmiſſimis rationibus, confirmantque*

firmantque, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant; Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorũ sectæ, (ut alios interim philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami e trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnunquam a fonte ipso Aristotele dissident, ut prorsus ignores, quid nam sibi uelit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, ut pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse glorian tur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiã esse digniorem, præstantiuremque, quæ magis synceritatis, ueritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ ueritatem adeo expetant, adament, excolantque, ut non solum nihil, quod sit falsum, uerum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEmaticarum disciplinarum.

NON *solum vtiles, verumetiam necessariæ admodum censeri debent disciplinæ* Mathematicæ *cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicã, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemq;*

nostri intellectus attollere absque ullo medio tentemus, nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res metaphysicas, quæ sunt ab eadem maxime auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales a Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationẽ exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas recte percipiendas, interpretandasque conferant, multis uerbis pulcherrime nobis exponit B. August. lib. 2. de Doctrina Christ. demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi a multis, quæ translate, ac mystice posita sunt in scripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit; eandemque sententiam longe post pluribus uerbis repetit eodem lib. Hoc idem docet D. Hieron. tomo 1. Epist. 1. asserens, magnam inesse numeris uim ad multa mysteria in scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis utilitatem, perhibet. Rursum B. August. loco, quem paulo ante retuli, testatur, Musicam pernecessariam esse doctori Christiano, subiungens paulo post, Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans D. Gregorius Nazianzenus, summis laudibus D. Basilium præceptorem suum extollit, quod in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque scientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfecte acquirendas, ut perspicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philosophorum, maxime Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos ad bene recteque philosophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimum de causa, ut ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus uidebantur esse, per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quæ proculdubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathematica-

Cap. 16.

Cap. 37.

Cap. 16.

Cap. 19.

maticarum omnino est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος ὀυδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (ut copiose scribit (non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, uerum etiam ad remp. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeo, ut etiam si nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidē experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contra uero, eos qui ad hasce facultates idonei minime reperiūtur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Tymæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes utilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiusq; animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honestissimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque versari solebant: Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi,

cipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab aliis studiis excæcatur, defoditurque, a Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum philosophorum, quibus harum disciplinarum utilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque præstantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS, ATQVE GEOMEtriæ commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (ut aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq; Geometria uniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, ut testatur uulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit a se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondendoq; (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de uitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quest. Acad. lib. 2. ubi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, a quo iidem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset unum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & aliis auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui AEgypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cœpit imperare, ut Ioannes Lucidus refert. Quod quidem uerius esse crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius

Megarici

Megarici diligentiſſime enumerans , nullam prorſus faciat mentionem huius celeberrimi uoluminis de Geometricis elemẽtis conſcripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam ſibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum eſt, Diogenem in monimentis philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus uel ſcientem uoluiſſe prœterire, uel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum, ignoraſſe. Itaque Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo philoſopho longe alius eſt, qui, cum in doctrina Academicorum eſſet ſumma cũ laude uerſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo uendicarit. Scripſit autem uolumina ad rem Mathematicam ſpectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutiones ad Muſicam capeſſendam pertinentes, Phænomena, atq; Datorum liber, opus de Diuiſionibus, quod nonnulli ſuſpicantur eſſe libellum illum acutiſſimum de ſuperficierum diuiſionibus, Machometo Bagdedino aſcriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinenſis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem eſt editus. Conſcripſit item conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuſcula. Maxime uero hoc uolumen elementorum Geometricorum nunquam omnium conſenſione ſatis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, ut nullus unquam eorum, qui ſimilia conſcripſerunt elementa (conſcripſerunt autem, ut ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipſum ſuperarit. In quo quidem, ut ſummum ingenij acumen demonſtrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in uulgus edenda, ſed ea duntaxat, quæ uiſa ſunt eſſe neceſſaria, atque utilia, ad communem omnium utilitatem, argumentis, & rationibus firmiſſimis cenſuit eſſe comprobanda. Cæterum, quanta ſit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde uniuerſæ Geometriæ, præſtantia, ac utilitas, partim ex ijs, quæ ante ſcripſimus, partim ex ijs, quæ nunc dicemus, non obſcure perſpici poteſt. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob cauſam, quod ſine ipſis nullum opus Mathematicum poſſimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes ſiquidem Mathematicarum re rum scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus usurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere uult, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis utitur in uocibus omnibus exprimendis; sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene, ac perfecte calleat prius, necesse est. Ex his etenim elementis, ueluti fonte uberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in cælo per instrumenta syderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum uis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum uariarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere uarie illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius huius mundanæ est inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius explorata figura, acquantitas. Ostenditur, atque demonstratur unius huius scientiæ ui cæli uniuersi, syderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, uarietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusque uarij tam expedite cognoscuntur, ut & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis, ac Lunæ defectiones certissime, ante quem fiant, in omne posterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis nostræ oculis munere, ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse uident, omniumq; fidē superant, perspicua facere, credibiliaq; esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historie. Cum enim Hieron Syracusarum rex nauem, quam Ptolemæo AEgyptiorum regi mittere statuerat, tantæ esset molis fabricatus, ut eam omnes una Syracusii a loco dimouere minime ualerent, Archimedes Geometra peritissimus unius Geometriæ uiribus fretus regi promisit, se effecturum, ut ipsam solus rex absque ullo labore subduceret: Quod cum præstitisset, in conspectu omnium rex stupefactus exclamasse perhibetur;

hibetur; Ab hac die, quicquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic uidetur mihi esse pulcherrimũ illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri, & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime ostendit. Neque silentio præteriri debet, eundem Archimedem robori, ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumero, iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, e loco se commouere posse. Pari ratione, datis uiribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere: Et alia id genus non solum ab Archimede, uerum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse memoriæ proditũ est. Tantum denique nomen una hæc Geometria Archimedi peperit, ut Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam urbem defenderat Archimedes machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnatæ urbis direptione, ac cæde ciuium unius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem ubi contra imperium suum, & uoluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, uehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem uiuo habere non potuit. Cuius sepulchrũ Cicero a se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam, utilitatemq; Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit uis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenue fatetur Galenus insignis philosophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cum scholas Peripateticorum, ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore, studioque arripuisset, nihil fere ab ipsis audiße se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimmo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiã naturali rationi pugnantia reperisse: Ita ut ad Pyrrhoniorum

fere

fere (erant Pyrrhonij philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæq; (quibus artibus ab auis, & patre fuerat institutus) esset cognitione, scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & lineares demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime sit utilis, ut aliæ artes facilius, & rectius percipiantur. Postremo est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis, & inferioribus hisce machinis, a quibus originem traxit, sed euolauit in cælum usque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cælestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem, & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA *diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali uocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprie, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria uniuerse sibi hunc scopum proponit, ut plana, aut solida uel constituat, uel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque uero mirum alicui uideri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus extent propriæ contemplationes, ut diximus, non autē de lineis, uel etiam punctis: Non, inquam, debet uideri mirū, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potissimum circa figuras uersatur, quæ in planis duntaxat, uel etiam solidis consistunt omnes Non enim puncta, uel lineæ figuram ullam constituūt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus uero, siue planis, & corporibus, solidisue maxime conueniebat, ut proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis; in posterioribus*

ribus uero quinque de solidis acutissime disputat, eorumque pro prietates maxime illustres peruestigat. Quoniam uero cum res omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant; absque linearum commensurabilium; atque incommensurabilium notitia; Immo uero quam plurimæ magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absque earundē linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpe numero sint talia, ut ea communis, & nota mensura data metiri nequeat, ut liquido constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atque usum; idcirco ut hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimensionemque requisita, Stereometriæ suæ præposuit decimum librum, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis disserit. Intelligens rursum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorum passionibus, easque copiose, & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persecutus. Quamobrem totum hoc uolumen elementorum Geometricorum quindecim libris comprehensum, (quorum quidē priores tredecim sine ulla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus, posteriores uero duo a nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita ut prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes complectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis cōmensurabilibus, incommensurabilibusque disputet; Quarta denique reliquis quinque libris absoluta scientiam solidorum, siue corporum complectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, inuestigando eorum æqualitatem, & inæqualitatem: In quinto uero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto denique proportiones figurarum planarū discutiuntur. Quid uero Euclides in singulis alijs libris pertractet, pro prijs in locis exponemus.

QVID

QVID PROBLEMA, QVID THEOREma, quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO *omnis Mathematicorũ diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema uocant eam demonstrationem, quæ iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterum constitui, appellabitur huiuscemodi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius utraque pars contradictionis (ut ipsi loquuntur,) est probabilis, qualis hæc est quæstio; An totum distinguatur realiter a suis partibus simul acceptis: Sic etiam quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat, se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Isosceles, uel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi potest in partes non æquales. Est tamen discrimen non paruum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico utrauis pars contradictionis suscepta confirmatur tantum probabiliter, ita ut intellectus cuiusque ambigat, utranam illius pars uera sit: In Mathematico uero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonstratione, ita ut nihil omnino dubij sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineã perpendicularem educere, efficiet utique hoc ipsum ratione cõstanti, & euidenti: Eodem modo dicendum est, si ex eodem puncto uelit educere lineam non perpendicularem. Theorema autẽ appellãt eã demonstrationẽ, quæ solũ passionẽ aliquã, proprietatẽue unius, uel pluriũ simul quantitatũ perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æ-*

quales duobus rectis, uocabunt talē demōstrationē Theorema, quia nō iubet, aut docet triangulū, aut quippiā aliud construere, sed contemplatur tantūmodo triāguli cuius libet constituti passionē hanc, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde a contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis utraque pars uera ut sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, ut inæquales quoq; sint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaque ut uno uerbo dicā, quæsitū illud Mathematicum cōstruere aliquid docēs, cuius etiā oppositū potest effici, Problema: Illud uero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo uelle angulum rectū constituere, irridendus omnino esset, & Geometriæ prorsus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in semicirculo constituti sunt recti, ut demonstrabitur in lib. 3. propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendū erit. Cæterū tā problema, quā theorema dici consueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quod utrumque aliquid nobis proponat, ut in exemplis adductis constat. Hæc ideo dixerim, ut studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (ut aliorum interim uolumina taceam,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur, his fere uerbis: Quod faciendum erat: Theorematum uero hisce: Quod ostendendum uel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis utriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur & non una tantum, quamuis ultimus syllogismus demonstratiuus solum concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, ut declarabimus in prima Euclidis propositione, nec non in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM uero ad demonstrationes problematum, atque theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, uel problemata minus principalia, & quæ facile ex *le ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum a Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, ut breuius demonstrari possint. Vocant autẽ illa Lemmata, propterea quod solum assumantur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituatur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac breuior.*

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisque disciplina ex præexistente gignatur cognitione, ut auctor est Aristoteles, atque ex assumptis, & concessis quibusdã principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autẽ scientia ex eiusdẽ Aristotelis, aliorumq; philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt utique & Mathematicæ disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata, ac theoremata confirment. Horum autẽ tria tantũmodo genera apud Mathematicos reperiũtur. In prima reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cũ Aristotele suppositiones, vt vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominũ ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur petitiones, siue Postulata, quæ quidẽ adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertiũ genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ non solũ in scientia proposita, sed etiam in omnibus alijs ita manifesta sunt, & euidentia, ut ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa uocabula recte perceperit. Atque his principijs recte mihi uidetur accõmodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles. A ianua quis aberrabit? Vt præclare a Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum elementorum præmittit ante demonstra-

monstra-

monstrationes suarum conclusionum omnia hæc principia, ut ex ipsis, quæ quidem facile a quouis intelliguntur, deducat admirandi theoremata, quibus nemo unquam assensum præberet nisi certa, ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusque seculis prædicanda, quod ex tam exiguis initiis, cuilibet quantumuis rudi & ignaro notissimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectū remota; quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusque certissimis ita confirmat. ut nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porro in huiusce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide seruatur, ut in ipso quidem introitu sciētiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque uero oīa principia Geometrica ab Euclide ī his elementis sūt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda, quæ tamen ex ijs, quæ tradidit. sine magno labore ac studio percipi possunt & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuisse uideamur rerum Mathematicarum studiosis, adiunximus uarijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse.

ERRATA PRIMI TOMI
SIC CORRIGITO.

Folium.	Linea.	Errata.	Correcta.
39. a.	11.	PROPOS.18.18.	PROPOS.18.19.
40. a.	30.	AEC.	ABC.
52. a.	33.	duo arcus duo arcus.	duo arcus
62. b.	9.	ACDF	BCDF
67. a.	37.	AD	BC
72. a.	37.	4.primi	14. primi
74. a.	9.	pronitur	proponitur
79. a.	23.	33.primi	30. primi
88. a.	24.	FGE	EFG
131. b.	8.	AF	DF
132. a.	15.	eadem	easdem
185. a.	22.	figuiras	figuras
229. b.	5.	eorum	earum

INDEX PROBLEMATVM, AC THEOREMATVM, QVAE præter ea, quæ continentur in Euclidis propoſitionibus, in his elementorum libris demonſtrantur.

IN PRIMO LIBRO.

Omnes

IN SECVNDO LIBRO.

IN TERTIO LIBRO.

Segmen-

IN QVARTO LIBRO.

sitq;

Si fue-

IN OCTAVO LIBRO.

IN NONO LIBRO.

 sub

IN DECIMO LIBRO.

Quoi cun-

IN VNDECIMO LIBRO.

Si fuerint

IN DVODECIMO LIBRO.

IN TERTIODECIMO LIBRO.

IN QVARTODECIMO LIBRO.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

Si in

IN SEXTODECIMO LIBRO.

Minus

Diameter

Angulum

FINIS.

EVCLIDIS
ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

T*OTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus, proprietatesq; triangulorum tum iuxta angulos, tum iuxta latera, quæ quidem inter se comparat interdum, interdum vero vnumquodq; per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera secundum æqualitatem, atq; inæqualitatem, rimatur. Idemq; varijs rationibus inquirit in duobus quãdoq; triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq; vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorũ rem propositam exorditur a principijs, initio facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac* *facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem, altitudinemùe alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam deniq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas .n. oĩs cõtinua aut longa solũ est, aut longa simul & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neq; aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, hactenus nondũ est excusus. Itaq; quod in quãtitate cõtinua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum esse cogitetur, id appellatur ab Euclide, & a Geometris punctum. Huius exẽplũ in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum vero indiuiduum prorsus debet existimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.*

punctum

·

I I.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

D E F I N I T *hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati.*

obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbræ extensa, carens omni latitudine, cum sit limes vtriusq;. Mathematici quoq;, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligamus ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem, secari, atq; diuidi.

III.

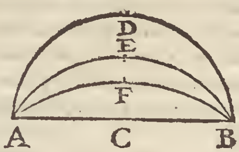
LINEAE autem termini, sunt puncta.

DOCET, quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IIII.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraq;. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atq; illuc deflectendo subsultat; in qua deniq; nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionẽ exponens ait, tunc demũ lineã aliquã ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spacium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tãtum occupat præcise spaciũ, quanta est distantia puncti A, a puncto B: Lineæ vero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spacia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A. & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchre sic definit. Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A illuminaretur: Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremũ B, ob interiectum punctum C. quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ minor di

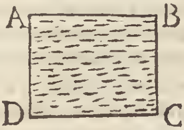


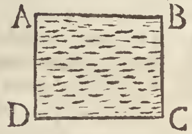
nor diceretur, quam A C B. Campanus describens rectam lineam, vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus egit copiosissime Apollonius in conicis elementis, linea Conchoideos, de qua Nicomedes, linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & aliæ huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede descripta qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunq; sunt mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libris de cælo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum. lib.1.tex.5.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B,





B C, C D, D A, comprehensa, consideratáq; secundum longitudinem A B, vel D C, & secundũ latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusq; corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoq;, propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem interuallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

V I.

SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

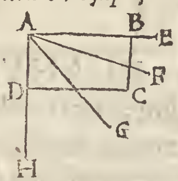
NON dissimilis est hæc definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt lineæ A B, B C, C D, D A; Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

PLA-

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HAEC quoq; definitio similitudinem quãdam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumue subsultando, non recedant, appellabitur plana. qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorue, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tunc demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circunducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadẽ, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia



puncta superficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior a linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circunduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaq; vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari posit recta linea secundum A B, & A F, & deniq; secundum omnes partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, quæ super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur super-

 ficies

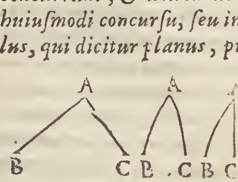
ficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones; Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior

alicuius globi, columnæue rotundæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest: Idemq; dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

VIII.

PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

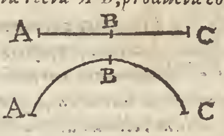
DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunq; duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A & non iacent in directum, ideo



efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ

non

non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo se iungitur: Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam, non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere.



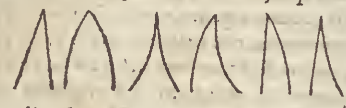
Itaq; vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productæ se mutuo secent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod se se contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotæ cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neq; anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæræ constituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum a nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

CVM

I X.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuili-



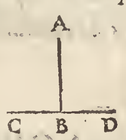
nei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum conuexum, & concauũ, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur: Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisúe linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & alijs commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.

X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpẽdicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, pro-

ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quæ nam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, rectæ C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadẽ linea CD, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed æquabiliter rectæ C D, insistet, vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori: Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius primi libri. Itaq; vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quid nam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quem nam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore, hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



OBTV-

XI.

OBTVSVS angulus eſt, qui recto maior eſt.

QVANDO recta AB, rectæ CD, inſiſtens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam cauſam neutrum rectum, ſed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtuſus, qualis eſt angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.

XII.

ACVTVS vero, qui minor eſt recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alterã: Obtuſus vero, & Acutus augeri poſſunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea poßit recedere, vt perſpicuum eſt. Quoniã vero ad quemuis angulum planum conſtituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures exiſtunt anguli, ſolent Mathematici, vt tollatur confuſio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media oſtendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero ſignificant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia in ſuperiore figura angulum obtuſum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD; quod diligenter eſt notandum, vt facile dignoſcamus angulos, quorum mentio fit in demonſtrationibus.

TERMI-

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos poßidens Figura dici potest, ne lineam finitam Figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ; & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt, vt solida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Superficies quoq; infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest. Figuræ vnico comprehensæ termino sunt. Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides & aliæ huiusmodi: Pluribus vero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circunscripta, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus. planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinq;, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

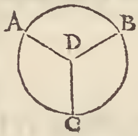
XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub

vna

vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circunscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spacium concludatur vnica



linea A B C, habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote a D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertii lib. Adiungit quoq; Euclides, lineam extremam circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circunferentiam. Potest circulus etiã hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur a linea recta finita circa alterum punctum extremũ quiescens circunducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. xi. Vt si intelligatur recta A D, circa punctum D, quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, a quo dimoueri cœpit, describet ipsa recta totum spacium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoq; punctum quiescens D, illud, a quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta A D, circunducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circunscripta, tamen quia in ea non datur punctum, a quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.

HOC

XVI.

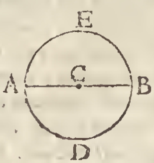
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, a quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.

XVII.

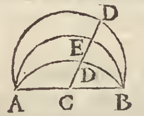
DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraq; parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur oïs in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum vsq; ad peripheriam vtrinq; extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum



bifariam

bifariam ſecari a diametro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinq; æquales circunferentiæ abſcindantur. Quod



tamen Thaletem Mileſium hac ratione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, communis ſit vtriq; portioni: Si igitur circunferentia A D B, congruat penitus circunferentiæ A E B, manifeſtum eſt, duas illas portiones a diametro factas, eſſe inter ſe æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circunferentia A D B non omni ex parte cadere dicatur ſuper circunferentiam A E B, ſed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro C, ſecans circunferentiam A D B, in D, & circunferentiam A E B. in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex centro ad circunferentiam eiuſdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna ſit pars alterius, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, ſed ambæ inter ſe aptabuntur, ideoq; æquales erunt, quod demonſtrandum proponebatur.

XVIII.

SEMICIRCVLVS vero eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in ſuperiori circulo figura A D B, contenta ſub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur ſemicirculus, quia, vt in præcedenti definitione oſtendimus, ea eſt dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, ſemicirculus. Idem autem punctum C, diametrum ſecans bifariam, centrum eſt in circulo, & in ſemicirculo.

HABENT nonnulla exemplaria hoc in loco definitionem egmenti circuli: Verum, quia ea repetitur in 3. lib. vbi prius

prius est locus, & Proclus illã non inuenit in antiquis exemplaribus, maluimus hic illam subticere, eiusq; explicationem in 3. librum, ante quem nulla fit mentio segmentorum circuli, differre.

XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circunscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circunscribuntur, aperte nobis innuit, quo nam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE vero, quæ sub quatuor.

Eadem ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

Qvoniam species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciē, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atq; ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circunscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, forte eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes a quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atq; reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterū est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

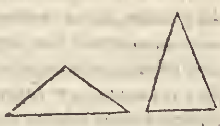
Descendit iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum,

rum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis se se possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Aequilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, ceu ad quintã propositionem huius libri demonstrabimus.

XXIIII.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

Ex hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet.



XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

Hic deniq; ex inæqualitate omnium laterũ trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorũ ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore,

 vel mi-

vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum vero Isosceli, tertium deniq; Scaleno respondet triangulo. Cæterum quanam arte construenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt supra diximus,) fit vt tres quoq; species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti; aut deniq; nullus rectus, nullusq; obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs

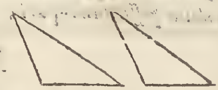
Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse vel Isosceles, vel scalenum, vt hæ figuræ indicant; Æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoq; cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod

obtusum angulum habet.

TRIANGVLVM amblygonium, siue obtusangulum esse quoq; potest vel Isosceles, vel scalenum, vt in his figuris cernitur,



non autem æquilaterum; alias eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quæ propos. 5. ostendemus, æquales, ideo q; cum vnus ponatur obtusus, omnes tres obtusi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, esse necessario Oxygonium: At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel rectangulum, vel amblygonium, vel Oxygonium; Vt vnica sit species trianguli æquilateri tres vero tam Isoscelis, quam Scaleni: atq; in vniuersum septem triangulorum genera, æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isoceles amblygonium Isosceles oxygonium, scalenum rectangulum, scalenum amblygonium, & scalenum oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum &c. Hoc te breuiter *monere volui, ne putares aliqd latere mysterij in base triãgu li, intelligeresq́; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.*

XXIX.

QVADRILATERARVM autẽ figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq́; anguli recti. Itaq; quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.

XXX.

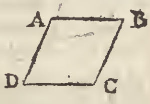
ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter se, & A D, B C, inter se quoq; æqualia sunt, cũ A B C D, propter angulorũ rectitudinẽ, parallelogrammũ sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.

HAEC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppoſitas prorſus habet conditiones, & diuerſas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppoſiti inter ſe æquales exiſtant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter ſe, & B, & D, quoq; inter ſe æquales ſunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterũ, parallelogrammũ ſit, ceu ad eandem propoſ. 34. huius libri demonſtrabitur.



XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduerſa & latera, & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt, neq; rectangula.

EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte oppoſita. Nam neq; eius latera omnia æqualia ſunt, neq; vllus angulus rectus, ſed tamen latera bina oppoſita, qualia ſunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter ſe, item anguli bini oppoſiti, quales ſunt A, C, & B, D, inter ſe exiſtunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici poſſunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; ſunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

RELIQVAS *Omnes figuras quadrilateras, quæ a prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectes, neq; latera bina opposita, neq; angulos binos oppositos habeant inter se se æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidẽ, cum infinitis modis variari queant, recte irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.*

XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraq; parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunq; partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, alteri quoq; accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana rectæ A B, applicetur,

cetur,

cetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circunducta tangat quoq; omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur huiusmodi rectæ

duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eædem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eodem dicantur superficie existere. : Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide vtramq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandē ex vna parte longius protractas in vnū punctū cōuenturas, quamuis ex altera semp magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunq; ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna, eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodem existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conātur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri: Quoniam vero hoc eodem in libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

PA-

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

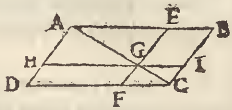
Vt figura quadrilatera ABCD, siquidem latus AB, æquidistet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ nō sunt parallela, inter se æqualia, diciturq; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus

parallela

parallelæ ſecantes diametrum in vno eodemq; puncto, ita vt parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.



SIT parallelogrammũ A B C D, in quo diameter A C; & linea E F, ſecans diametrum in G, & parallela exiſtens lateribus A D, B C; Item linea H I, ſecans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus A B, D C, exiſtens. Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, parallelogrammum totum diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidẽ duo E B I G, G F D H, per quæ diameter A C, non tranſit; vocantur a Geometris complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum A E G H, G I C F, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, vt videre eſt in præſenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM hoc poſtulatum planum admodũ eſt, ſi recte conſideretur ea, quæ paulo ante de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius, atq; adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt ſi

punctum

punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione expostulat Euclides, quemadmodum hic vides a puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeræ aliæ ab eodem puncto educi possunt ad alia atq; alia puncta.

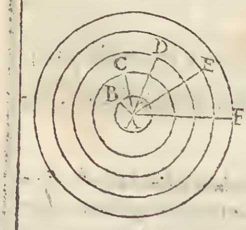
II.

ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QVOD *si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam. Sic linea recta A B, producta est primo in continuum ad punctum C, Deinde ad punctum D, &c.*

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM *vero, si terminatam rectam lineam cuiuscunq; quantitatis mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremũ ad quoduis punctum, ipsamq; circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus; effectumq; quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinq; lineis A B, A C, A D, A E, A F, quæ singulæ circa centrum A, circum-*

circumuolutæ singulos circulos descripserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER *hæc tria postulata quibus Euclides cõtentus fuit, sunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.*

IIII.

ITEM quacunq; magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS *enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite; Vnde nunquã dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.*

COMMVNES NOTIONES, siue Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

FIERI *nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior æqualis fuerit propositæ quantitati; su-*

ti, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoq; esse.

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoq; æquales.

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAM si reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuisset detractum, quam a maiore.

IIII.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia.

QVIN &, si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adijciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

Sic etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest. Possunt enim compositæ quantitates, vel residuæ, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiam si ex 7. & 5 detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1, ex 7. & 5. remanebunt 4, & 4. quæ æqualia quoq; existunt.

Porro in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum, intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

Similiter, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c. alicuius quantitatis, deficeret vtiq; minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si cõtra, minus esset duplex, vel triplex &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari

bari potest, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtriq; tertia illa addatur, erunt compositæ duplices illius tertiæ; sed & inter se æquales, ob idem
2. pron. additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ; Cum igitur &
2. pron. æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademq; sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum.

VII.

ET quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.

PARI ratione, quæ eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt.

VIII.

ET quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOC est, duæ quantitates, quarum vna superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando vna alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter se inæquales existant.

ECON-

ECONTRARIO, *Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuo congruent. si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse æquales secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum &c.*

IX.

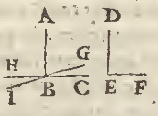
ET totum sua parte maius est.

CVM pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

X.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

HOC axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuiùe nequeat, sed prorsus sit immutabilis: Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet: Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdũ. Conatur tamẽ Proclus ex 10. definitione id demõstrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F. quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitq; A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectã D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis est B G, propterea quod angulus D E F, minor ponatur angulo A B C. Producatur C B, in rectum & continuum vsque 2. petit.



 ad H;

ad H; Cũ igitur angulus A B C ſit rectus, erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoq; , quare maior etiam an-
10. def. *gulo A B G. Producta autem G B, in rectum & continuũ vſq;*
1. petit. *ad I, cum angulus A B G, ponatur rectus, fiet angulus ABI,*
10. def. *illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoq; erit angulo A B I, pars toto, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt duo anguli recti propoſiti, ſed æquales. Quod eſt propoſitum: eademq; eſt ratio in cæteris.*

RECTE *autem hoc loco monet Pappus, axioma iſtud nõ poſſe conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis, rectus eſt, cum & curuilineus recto æqualis eſſe queat, vt in 5. lib. dicemus, qui tamen non dicitur rectus, cum non ſit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter ſe æquales erunt, ſine vlla exceptione.*

X I.

ET ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

VT ſi in duas lineas rectas A B, C D, incidens alia recta E F, faciat duos angulos internos, & ex eadẽ parte B E F, D F E, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandẽ couenturas eſſe ad aliquod punctũ vnũ, verſus eam partem, in qua duo anguli minores exiſtũt duobus rectis, vt appoſitum exemplum commonſtrat. Ratio huius perſpicua eſt, quoniã quãdo duo anguli interni, & ex eadẽ parte æquales ſunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partẽ coire poſſunt, ſed æquali ſemper ſpatio protenduntur, vt propoſ. 28 huius lib. demõſtrabitur: Quare ſi duo anguli interni, & ex eadẽ parte efficiuntur minores duobus rectis, neceſſe eſt ex ea parte di-

te dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem eſſe aliquãdo in vnũ punctum. Verum quia hoc axioma a numero principiorũ omnino reÿcitur ſecundũ Geminũ Geometrã, Proclum, & alios, diciq; debet potius Theorema, quam principiũ, cũ nõ facile quiuis ei aſſenſum præbeat, propterea quod reperiantur & aliæ lineæ, quarũ ſpatiũ licet ſemper magis, ac magis coanguſtetur, nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamſi infinite producantur, vt conſtat ex elementis conicis Apollonÿ: Idcirco illud poſt 28. propoſ. & ante 29. huius libri, vbi primum eius vſus incipit apparere, Geometrice demonſtrabimus ex ſententia Procli, vt ſine vlla dubitatione ad theorematum, atq; problematum demonſtrationes poſſit aſſumi.

XII.

DVAE rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

NVLLAM prorſus habet difficultatem hoc principium; Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coëant ad efficiendum angulũ, neceſſario ex altera parte ſemper magis ac magis diſiungẽtur ſi producãtur, vt in exemplo propoſito perſpicuũ eſt. Quare vt ſuperficies, ſpatiumue quodpiam rectilineũ ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda eſt. Ita enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarũ rectilinearũ prima. Proclus tamen demonſtrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri põt vt duæ lineæ rectæ claudãt ſuperficiẽ, cõprehendãt duæ rectæ A B C, A D C, ſuperficiem ABC D, ita vt duæ illæ rectæ coëant in duobus punctis A, & C. Facto deinde centro C, deſcribatur circulus interuallo C A, & producantur rectæ A B C, A D C, in rectũ, & cõtinuũ vſq; ad circunferẽtiã, nempe ad pũcta E, & F. Itaq; quia rectæ A C E, A C F, trãſeunt per centrũ C, erũt ſemicirculi A E, A E F, inter ſe æquales, & idcirco circunferentia quoq; A E, circunferẽtiæ A EF, æqua- 3. pet. 2. pet. 17. def.

 lis

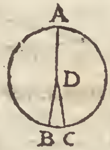
lis erit, pars toti, quod fieri non poteſt. Non ergo rectæ duæ lineæ ſpacium comprehendunt. Quod eſt propoſitum.

HVIC duodenario numero Axiomatum ab Euclide poſitorum adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus neceſſaria ad futuras demonſtrationes Problematum atq; Theorematum cum Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XIII.

DVAE lineæ rectæ non habent vnum & idem ſegmentum commune.

NON eſt difficile iſtud Axioma, ſi perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo ſemper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione poteſt, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo ſe mutuo interſecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonſtrat. Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem



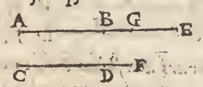
3. pet. *D, & interuallo D A, deſcribatur circulus ſecans duas rectas propoſitas in punctis B, & C;*
17. def. *Erunt igitur duæ circunferentiæ A B, A B C, inter ſe æquales, (Sunt enim circunferentiæ ſemicirculorum æqualium, cum A D B, A D C, ponantur eſſe diametri) pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem ſegmentum commune. Quod eſt propoſitum.*

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere ſegmentum, quando vnam & eandem rectam lineam conſtituunt. Vt in ſubſequenti figura, rectæ A G, E B, commune habent ſegmentum B G; quia ambæ vnam rectam conſtituunt lineam A E. At vero quando duæ rectæ ſunt diuerſæ, quales fuere A B, A C, in ſuperiori exemplo, nõ poſſunt poſſidere ſegmentum aliquod commune, vt recte a Proclo fuit demonſtratum.

XIIII.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis.

Hoc, & ſequens pronunciatum deſumpſit Proclus ex Pappo. Aequalibus itaq; quantitatibus A B, C D, addantur inæquales B E, D F, ſitq; B E, maior quam D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipſi D F, vt ſit G E, exceſſus, quo quantitas addita B E, ſuperat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqualibus A B, C D, addita ſunt æqualia B G, D F, erunt tota A G, C F, æqualia. 2. pron. *Quare conſtat, totam quantitatem A E, ſuperare totam C F, eodem exceſſu G E, quo magnitudo D F, adiuncta a magnitudine adiũcta B E, ſuperatur. Quod eſt propoſitũ.*



XV.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

In eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipſi D F, vt G E, ſit exceſſus, quo quantitas B E, quantitatem D F, ſuperat. Quoniam igitur æqualibus B G, D F, addita ſunt æqualia A B, C D, erunt tota A G, C F, æqualia; 2. pron. *Quamobrem tota quantitas A E, ſuperabit totam C F, eodem exceſſu G E, quo maior quantitas propoſita B E, minorem D F, ſuperat. Quod eſt propoſitum.*

XVI.

SI ab æqualibus inæqualia demantur,

 erit

erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

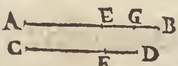
AB æqualibus A B, C D, auferantur inæqualia B E, D F. Sitq; E G, excessus, quo quantitas B E, superat quantitatem D F. ita vt B G, æqualis sit ipsi D F. Quia igitur ab æqualibus A B, C D, ablata sunt æqualia B G, D F, remanebunt A G, C F, æqualia.

3. pron.

Perspicuum ergo est, residuum A E, superari a residuo C F, eodem excessu E G, quo magnitudo ablata B E, ablatã magnitudinẽ D F, superat. Quod est propositũ.

XVII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui totorum æqualis.



AB inæqualibus A B, C D, auferantur æqualia A E, C F. Sitq; B G, excessus, quo tota quantitas A B, superat totam quantitatem C D, ita vt A G, æqualis sit ipsi C D. Quoniam igitur ab æqualibus A G, C D,

3. pron. *ablata sunt æqualia A E, C F, remanebunt E G, F D, æqualia. Quare residuum E B, superabit residuum F D, eodem excessu B G, quo tota quantitas A B, superat totam quantitatem C D. Quod est propositum.*

IN his quoq; quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorũ excessus, excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus, excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas. 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus

excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorũ excessus 2, idem est, qui ipsorũ 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Deniq; si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

XVIII.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM *omnes partes simul sumptæ constituũt totũ, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.*

XIX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT. quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. ꝑpterea reliquus illius 14. duplus etiã est reliqui huius 7. In vniuersum aũt hoc demõstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirũ. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atq; ablata ablatæ, vt decupla, vel cẽtupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atq; tota totius.

COLLIGI *potest ex dictis cũ Proclo, & Gemino hoc discrimẽ inter postulata, & Axiomata, quod cũ vtraq; sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturã sapiũt Problematũ, propterea quod aliquid fieri exposcant; hæc vero, Theoremata imitãtur, cũ nihil fieri petãt, sed solũ sententiã aliquã notissimã proponãt. Differt aũt Postulatũ a ꝓblemate, qđ cõstructio postulati non indigeat vlla demõstratione, problematis aũt constructionẽ cõcedat nemo sine demonstratione, eo qđ difficile aliquid nobis exhibeat cõstruendũ. Idẽ discrimẽ inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud. n. demonstrari nõ debet, hoc vero concedendũ nulla est ratione, nisi demõstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationẽ, vel etiã probationẽ requiret.*

Quæ eidem æqualia, inter se quoq; æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq; Theorematis, nec non de postulatis, problematisq;.

CONSTAT *quoq;, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, & tertiumdecimū, soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ a magnitudinibus æqualibus, relinquūt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; Ita quoq; numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.*

HAEC *dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.*

ANTEQVAM *porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam cum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, quoad ordinem propositionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. libris perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq;*

vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si aliquando numerus propositionum a Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in margine, quæ quidem citationes intelligendæ sunt modo infrascripto.

1. def.	Prima definitio. & sic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.
1. pet.	Prima petitio.
1. pron.	Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.
1. primi.	Prima propositio primi libri.
23. Vndec.	Vigesimatertia propositio vndecimi libri.
6. tertijd.	Sexta tertijdecimi libri.
9. sextid.	Nona sextidecimi libri. &c.
13. duod.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quind.	Septima libri quindecimi.
5. quartid.	Quinta libri quartidecimi.

Ex his aliæ citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

PRO-

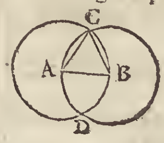
PROBLEMA I.

1. ## PROPOSITIO. I.

SVPER data recta linea terminata triangulum AEquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunq;, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principijs concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematis perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, ac efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant demonstrationem.

SIT igitur proposita recta linea terminata A B, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo re-



3. pet. ctæ A B, describatur circulus C B D: Itē centro B, & interuallo eiusdē rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum

1. pet. vtrouis, nempe ex C, ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B,
20. def. ad puncta A, & B; Eritq; super rectam A B, cōstitutū triāgulum A B C, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse

rio esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quam B C, æqualis est rectæ A B. Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atq; idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat. *15. def.* *1. pron.*

SCHOLION.

Vt autẽ videas, plures demõstrationes in vna propositione contineri, placuit primã hanc propositionẽ resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demõstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulũ A B C, constructũ methodo prædicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, est æquilaterum. *23. def.*

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Quæ eidem æqualia sunt, inter se quoq; sunt æqualia. *1. pron.*

Duo latera A C, B C, æqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia existunt.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ a centro ductæ ad circunferentiam circuli, inter se sunt æquales. *15. def.*

Lineæ A B, A C, sunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter se.

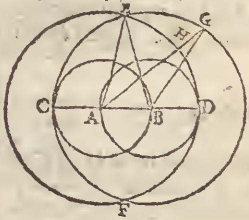
Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur a centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propositiones non solum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

Negligunt

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis
demonstrationibus, eo quod breuius ac facilius sine ea demon
strent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex supe-
riori demonstratione.

SIQVIS autem super data recta desideret constituere
triangulum quoq; Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in



hunc modum efficiet. Sit recta
linea A B, circa quam ex cen-
tris A, & B, describantur duo
circuli, vti prius. Deinde pro-
2. pet. ducatur A B, in vtramq; par-
tem ad circunferentias vsq; ad
puncta C, & D. Atq; centro
3. pet. A, interuallo vero A D, de-
scribatur circulus E D F. Item
centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem
1. pet. in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, ducan-
20. def. tur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit su
per recta A B, triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, ni
mirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, & ma-
iora latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e cen-
15. def. tro A, ad circunferentiam E D F, erit A E, æqualis rectæ
15. def. A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad cir-
cunferentiam E C F, erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem
rectæ A D, B C æquales inter se, (vtraq; enim A C, & B D,
æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad
circunferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro
1. pron. B, ad circunferentiam quoq; egrediantur: Quare A C, B D,
2. pron. æquales inter se erunt. Addito igitur cõi recta A B, erit tota
1. pron. A D, toti B C, æqualis.) Igitur A E B E æquales quoq; inter
se erũt. Quod vero vtraq; A E B E, maior sit quã A B, per-
9. pron. spicuũ est, cũ A D, æqualis ostẽsa ipsi A E, maior sit, quã A B;
9. pron. Itẽ B C, æqualis demõstrata ipsi B E, maior quoq; sit, quã A B.
Constitutũ igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens
duo latera A E, B E æqualia inter se, & maiora latere A B qđ
faciendum erat. Atq; hæc est demonstratio Procli, aliorumq;
interpretum Euclidis.

BREVIVS tamẽ videtur mihi posse demonstrari, trian
15. def. gulũ A B E, esse Isosceles, hac ratione. Quoniã A E, æqualis est
recta

rectæ A D, & recta A D, est dupla rectæ A B propterea quod B A, B D æquales inter se sunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rursus quia B E, æqualis est rectæ B C, & B C, dupla est ipsius 15. def.
A B, propterea quod A B, A C æquales sunt inter se, erit & 15. def.
B E, dupla ipsi A B. Cum igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdẽ A B, erunt A E, B E, inter se æquales, maioresq́; propte 6. pron.
rea recta A B. Isosceles ergo est triangulum A B E.

I AM *vero, si ex pũcto A, ducatur linea recta A G, ad cir* 1. pet.
cunferentiã E G F, quæ nõ sit eadẽ quæ A E, vel A D, secans circunferentiã E H D, in pũcto H, & ex G, ad B, ducatur alia 1. pet.
recta G B; constitutũ erit triangulũ A B G super recta A B, 20. def.
quod dico esse scalenũ. Quoniam A G, maior est quam A H: 9. pron.
Sunt autem A H A E, ex centro A, ductæ, inter se æquales; 15. def.
erit & A G, maior quam A E, hoc est, quam B E, quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quam B G, cũ B G, sit æqualis ipsi B E. Est autem & B G, maior quam A B, 15. def.
propterea quod tota B C, æqualis ipsi B G. maior sit quã A B, 9. pron.
pars. Omnia ergo tria latera triãguli A B G, inæqualia sunt, ideoq́; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.

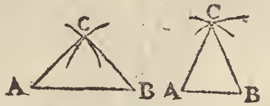
PRAXIS.

CONABIMVR *in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quãdã facilẽ, & breuẽ, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atq; lineis cõtendit construere; Idq́; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorẽ vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.*

ITAQVE *triangulũ æquilaterũ ita facile construetur sup data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero datæ rectæ A B, describantur duo arcus circulorũ se intersecantes in puncto C,*

siue hoc infra lineã cõtingat siue supra. Post hæc ducãtur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; factũq́; erit, quod proponitur. Cuius rei eadẽ est demonstratio cũ superiori si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessario per puncta A, & B.

ISOSCELES *ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam A B, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus,*



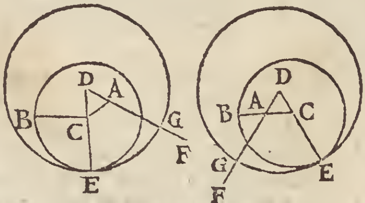
mus, [3]describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C; constructumq; erit Isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta A B.

SCALENVM deniq; hoc modo fabricabitur super data recta A B. Ex centro B. interuallo vero maiore, quam B A, describatur arcus aliquis: Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; constitutumq; erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.

CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunq;, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctũ datum A, & data recta linea B C; cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto altero utro extremo lineæ B C, nempe C, centro, describatur circulus B E, interuallo rectæ B C.

3. pet. pe C, centro, describatur circulus B E, interuallo rectæ B C.
1. pet. Et ex A, ad centrum C, recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secũda figura indicat.) Super recta vero A C;
1. primi. cõstruatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum

deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A C, extendantur; D C, quidem opposita puncto dato A, vsque ad circunferentiā in E; D A, vero opposita centro C, quantumlibet in F. Deinde e centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrū trāseuntis, alter circulus describatur E G, secās rectā D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctū datū A, æqualē esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circunferentiā E G, ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidē C E, æqualis est recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadāt e centro C, ad circunferentiā B E.) Igitur rectæ A G, & B C, quādoquidē vtraq; æqualis est ostēsa rectæ C E, inter se æquales erunt. Ad datum igitur punctū, &c. quod erat faciendū. — 2. *pet.* — 3. *pet.* — 15. *def.* — 3. *pron.* — 15. *def.* — 1. *pron.*

QVOD, si punctū datū fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, describatur circulus, ad cuius circunferentiā recta ducatur vtcumq; C E, erit hæc posita ad punctū datū C, æqualis datæ rectæ B C, cum vtraq; & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circunferentiam B E. — 3. *pet.* — 1. *pet.* — 15. *def.*

SCHOLION.

HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut .n. datū punctū in ipsa data recta est positū, aut extra ipsā: Si in ipsa, erit vel alterū extremorū eius, vel inter vtrūq; iacebit extremū. Si vero extra ipsam, erit vel e directo datæ lineæ, ita vt pducta in rectū & cōtinuū p ipsum pūctū trāseat; vel nō e directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorū quoduis recta linea ducta cū data recta angulū efficiat; Quo modo vel supra datā lineā erit cōstitutū, vel infra, vt manifestū est. In omnibus aūt istis casibus semper eadē est cōstructio, & demōstratio. Quod si in constructione fiat triāgulū A C D, sup recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

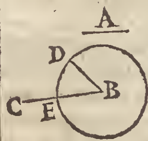
PROBL. 3. PROPOS. 3. — 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqua-

libus,

libus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

Sint duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineã æqualem minori A. Ad alterutrum extremorũ lineæ maioris B C, nempe ad punctũ B, ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualẽ ipsi A. Quoniã B E, æqualis est rectæ B D, & eidẽ B D, æqualis est recta A, per constructionem; erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.



2. primi.
3. pet.
15. def.
1. pron.

Qvod si duæ rectæ datæ cõiungãtur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, cõiunctæ in extremo vtriusq; B; describẽdus erit circul⁹ ex B, ad interuallũ minoris B D. Hic. n. auferet B E, æqualẽ ipsi B D, vt cõstat ex definitione circuli.

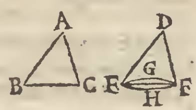
SCHOLION.

Varios etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alterã cõtingat; vel nõ, sed vel coniungãtur ad vnũ extremũ, vel se mutuo secent, vel certe altera alterã suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4. THEOREMA I. PROPOS. 4.

SI duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habeãt, vtrũq; vtriq; ; habeãt vero & angulũ angulo æqualẽ sub æqualib⁹ rectis lineis cõtentũ: Et basim basi æqualẽ habebũt; eritq; triangulũ triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterq; vtriq;, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint



SINT duo triangula ABC, DEF, & unius utrumque latus A B, A C, æquale ſit alterius utrique lateri D E, D F, hoc eſt, A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; angulusque A, contentus lateribus A B, A C, æqualis angulo D, contento lateribus D E, D F. Dico baſim B C, æqualem quoque eſſe baſi E F; & triangulum A B C, triangulo D E F; & utrunque angulum B, & C, utrique angulo E, & F, id eſt, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus A C, D F, inter ſe; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus A B, D E, inter ſe quoque eſſe æquales. Quoniam angulus A, æqualis ponitur angulo D, fit, ut ſi alter alteri intelligatur ſuperponi, neuter alterum excedat, ſed linea A B, congruat lineæ D E, & linea A C, lineæ D F. Cum igitur A B, & D E, ponantur eſſe æquales, neutra etiam alteram excedet, ſed punctum B, cadet in punctum E; Eademque ratione punctum C, in punctum F, propter æqualitatem linearum A C, & D F, ex hypotheſi. Itaque cum punctum B, congruat puncto E, & punctum C, puncto F, neceſſario & baſis B C, congruet baſi E F, (ut mox demonſtrabitur) ac propterea illa huic æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D E F, & angulus B, angulo E, & angulus C, angulo F, æqualis ob eandem cauſam exiſtet.

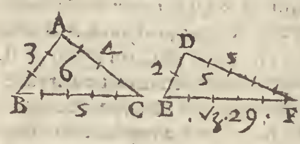
8. *pron.*
8. *pron.*
8. *pron.*

QVOD autē baſis B C, cōgruat baſi E F, ſi punctū B, puncto E, & punctū C, pūcto F, cōgruit; facile demōſtrabitur. Si nō cōgruere dicatur baſis B C, baſi E F, cadet uel ſupra, ut efficiat rectam E G F, uel infra, ut cōſtituat rectā E H F. Vtrū uis horum concedatur, claudent duæ lineæ rectæ E F, E G F, uel E F, E H F, ſuperficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quam E H F, rectam eſſe, cum utraque ponatur eadem eſſe, quæ recta B C) Quod eſt abſurdum. Duæ enim rectæ ſuperficiē claudere non poſſunt. Non ergo baſis B C, cadit ſupra, uel infra baſem E F, ſed illi congruet. Quare ipſæ inter ſe æquales ſunt, &c. Quocirca, ſi duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. quod demonſtrandum erat.

12. *pron.*

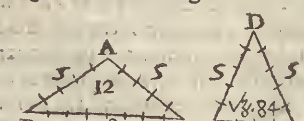
SCHOLION.

RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, ut duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius triãguli, utrumq; utrique; Secunda, ut angulus etiam unius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia; Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt unquam esse æquales, triãgula uero admodum raro æqualia existent, ut probe hoc loco a Proclo demonstratur. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem utrunque utrique sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitque A B, 3. A C, 4. ut ambo simul efficiant 7. At uero D E, sit 2. & D F, 5. ut ambo quoque simul 7. constituant.



Quibus positis, erit basis B C, 5; & basis E F, radix quadrata huius numeri 29, quæ maior quidem est quam 5, minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area uero trianguli D E F, 5. Anguli denique super basim B C, inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non utrumque latus utrique lateri æquale existat in dictis triangulis A B C, D E F.

RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia sint lateribus D E, D F, utrumq; utrique, sitq; unumquodq; 5; anguli uero A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sitque A, maior, quã D.



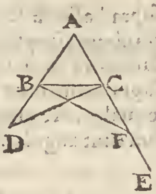
Quibus concessis, erit basis BC, maior base EF ut propos. 24. huius libri ostẽdetur. Quod si basim B C, ponamus esse 8. basim autẽ E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area uero trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est quam 9. minor uero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt

igitur

igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triã gula ipsa æqualia inter se sint; necesse est, ut utrumque latus unius æquale sit utriq; lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales existant, ut optime dixit Euclides.

THEOR. 2. PROPOS. 5. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

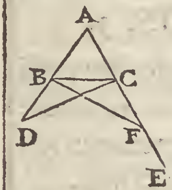


SIT triangulum Isósceles A B C, in quo duo latera A B A C, inter se sint æqualia: Dico angulos A B C, A C B, super basim B C, æquales inter se esse: Item si latera æqualia A B, A C, producantur quãtum libuerit, usque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C E C B, infra basim eandem B C, esse æquales. Ex linea enim A E, producta infinite abscindatur A F, æqualis ipsi A D, & ducantur rectæ B F, C D. Considerentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B A F, trianguli A B F, æqualia sunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, utrumque utrique, nempe A B ipsi A C, ex hypothesi, & A F ipsi A D ex constructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F æqualis est angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A communis est utrique triangulo: Erit basis B F æqualis basi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & posteriores, opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis ut patet. Rursus cõsiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam uero rectæ A D, A F, æquales sunt per constructionem, fit ut, si auferantur ex ipsis æquales A B A C, & reliquæ B D, & C F, sint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia sunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, utrumque utrique, uidelicet B D, ipsi C F, & D C, ipsi F B, ut probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, cõ-

3. primi.
1. pet.
4. primi.
3. pron.

4. primi

tenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut ostensum etiam fuit. Igitur erit angulus D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D angulo C B F. Tam enim priores duo quã posteriores, ęqualibus opponuntur lateribus. existuntq; supra communem basim B C, utriusque trianguli B D C, C F B. Quod si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales esse iam demõstrauimus in prioribus triangulis) detrahãtur anguli æquales C B F, B C D (quos itidem in posterioribus triangulis modo probauimus esse æquales) remanebũt anguli A B C, A C B, supra basim B C, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandem basim B C, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se & infra eandem inter se quoque sunt æquales, Ac propterea Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.



3. pron.

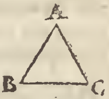
SCHOLION.

Haec propositio uera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis uideatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, æqualibus, siue reliquum latus B C, ipsis quoque sit æquale, ut contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, ut in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, ut constat ex demonstratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum uideri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum sunt assueti. Veruntamen, si diligenter theorematis præcedentis uis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, si modo memor sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponũtur. Quod quidem quoniam Campanus non apposuit, causæ fuit, ut confusa esse uideatur, & subobscura eius demonstratio.

CORO-

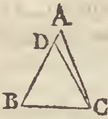
COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia, erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat. 5. prim.



THEOR. 3. PROPOS. 6. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.



IN triangulo A B C, sint duo anguli ABC, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: Et ex A B, abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, (quæ minor dicitur esse quam AB,) ducaturq; recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, DBC. In quibus cum duo latera A C C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, triãguli D B C, utrumq; utrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, æqualem D B,) & C B, ipsi B C, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: Erunt triãgula A C B, D B C, æqualia, totum, & pars, quod fieri nõ potest. Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, si anguli B, & C, super latus B C, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. quod demonstrandum erat. 3. primi 4. primi

SCHOLION.

Convertit hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se æqualia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque æquales: Hic uero si anguli ad basim sint æquales, latera quoque angulis illis opposita esse æqualia. Non autem mirum alicui debet uideri, si Mathematici aliquando conuertunt propositiones, ita ut nunc ex antecedente quopiam concesso colligant per demonstrationem consequens aliquod, nunc uero rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, ut ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus: Non debet, inquam, uideri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens; Cuius ego rei unum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis unum latus producatur, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocantur. Non enim sequitur, si figuræ cuiusuis rectilineæ uno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cũ possit etiam esse quadrilatera figura, ut ad propos. 16. huius lib. ostendemus. Eodemque modo multæ aliæ propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, ut prius demonstret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens & consequens illius reciprocari, antequam ex consequẽte concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones, quæ conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, ut fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam uidebuntur afferre utilitatem.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quintæ propositionis, ut liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, erunt latera

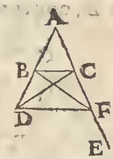
A B

A B, A C, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat. 6.primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo:

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.



Triãguli enim A B C, productis lateribus AB, AC, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, utrumque utrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit unum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim: erunt & bases C D, B F, æquales, & anguli B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, CF, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin æqualibus, remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia sunt lateribus F C, C D, utrumque utrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B F, ipsi C D, ut modo ostensum est; sunt autem & anguli contenti dictis lateribus, D B F, F C D, æquales, ut etiam fuit nuper demonstratum: Erit angulus B D F, super basim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, super eandem basim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, sint æquales, ut nunc ostendimus, erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus si rectę B D, C F, æquales, per cõstructionem, demantur, remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat ostendendum.

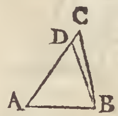
3.primi. 4.primi. 3. pron. 4. primi 6. primi 3 pron.

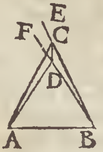
THEOR. 4. PROPOS. 7.

7.

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, uersus partem eandem C, nō posse ad aliud punctum, ut ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, utraque utrique, nempe A C, ipsi A D, quę eundem habent finem A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiā terminum possidēt B. Sint enim, si fieri potest, rectæ A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiā æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita ut recta A D, in ipsam rectam A C, uel BD in ipsam BC, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctū D, in altera rectarū A C, B C, nempe in A C, ut A D, sit pars ipsius A C. Quoniā igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales; Erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non potest. Sit secundo punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, usque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia, erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto. Igitur & angulus A D C, minor erit eodē angulo D C E: Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, erunt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo sit minor angulo D C E. Idē ergo angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem ęqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea super alteram cadat, ut in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus





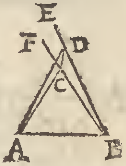
5. primi

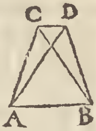
9. pron.

5. primi

sus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum: Aut in tali erit loco, ut posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C; Quo posito, in idem absurdũ incidemus, nempe angulũ D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqualem, ut perspicuum est: Aut denique punctum D, ita erit extra triangulũ A B C, ut altera linearũ posteriorum, nempe A D, secet alteram priorum, ut ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cũ in triãgulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, erunt anguli A C D, A D C, supra basim C D, æquales: Ac proinde cum angulus A D C, minor sit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rursus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, erunt anguli B C D, B D C, super basim C D, æquales: Est autem iam ostensum, angulum B C D, multo esse minorem angulo B D C: Idem igitur angulus B C D, & minor est angulo B D C, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se A C, A D, & inter se quoque B C, B D. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis &c. Quod erat demonstrandum.

5. primi
9. pron.
5. primi



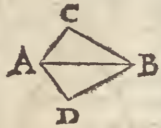


SCHOLION.

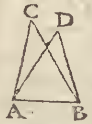
Fieri potest, ut duæ lineæ A D, B D, æquales sint duabus A C, B C, utraque utrique, ut A D, ipsi B C, & B D, ipsi A C, ut ultima figura indicat; Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, ut constat. Solæ enim A C, A D, eundem limitem possident A; Itẽ B C, B D, eundem B; optimeq; demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, ut A C, A D, inter se sint æquales, ita ut B C, B D, quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione apposita sunt hæc uerba: eosdemq; terminos cum duabus

duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse duæ lineæ simul sumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, BC, simul sumptis ut in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse utramque utrique esse æqualem, &c.

Eadem ratione possunt ex A, & B, infra A B, basim trianguli A B C, hoc est ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita ut A D, exiens e puncto A, æqualis sit ipsi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipsi B C, vt perspicuum est in apposita figura.



Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad easdem partes. Deniq; esse poterunt duæ lineæ A C, A D, æquales inter se, eundem terminum A, possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, ut reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter se quoque sint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratũ. Apposite igitur dictũ est in propositione: duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c.



Quare vt plane scopus Euclidi in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.

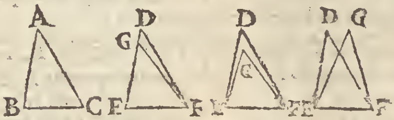
8.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebũt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, utrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; sit autem & basis B C, basi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum uidelicet vterque dictis lateribus cõtinetur.

tinetur. Nam si mente intelligatur basis B C, superponi basi E F; neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum A B C, cogitetur cadere super triangulum D E F, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, 8. pron.



aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cũ ponantur æqualia; Ac propterea angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterũ excedat. Quod si punctũ A, alio dicatur cadere, ut ad G, quomodocunq; id cõtingat, hoc est, siue in latus E D, siue intra triangulum E D F, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadem est, quæ B A) æqualis ipsi E D; & F G, (quæ eadem est, quæ C A) æqualis ipsi F D, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus alterius: Hoc autem fieri non posse, iamdudum demonstratum est, cum tam rectæ E G, E D, terminũ eundem E, quam rectæ F G, F D, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet alio, quam in punctũ D: ac propterea angulus A. angulo D, æqualis erit. Quare si duo triãgula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

8. pron.

7. primi.

SCHOLION.

Vt vides, hæc propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita ut theorema proponatur in hanc formam.

Si duo triangula bases habuerint æquales, &

angulos

angulos super bases constitutos ęquales, utrunque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrunque utrique, quæ uidelicet æqualibus lateribus subtendũtur, angulosq; reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

Sit enim basis B C æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusq; C, angulo D F E; Dico latus quoque A B, lateri D E, & latus A C, lateri DF, æquale esse, angulumq; A, angulo D. Nã

8. pron. *si basis basi superponatur, congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, proptereaq; omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere uidetur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26, ut eo loco monebimus.*

COROLLARIVM.

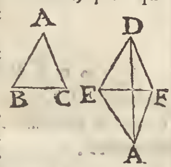
Porro ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, uerum etiam reliquos angulos, qui ad bases cõstituuntur, utrumq; utrique, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totũ triangulum toti triangulo, ut constat ex eadem superpositione unius trianguli super alterum; Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut perspicuũ est. Quod etiã ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cũ latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, ut in propos. 4. demonstratum est.

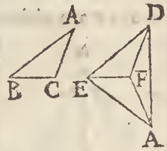
EX PROCLO.

Philonis familiares conãtur hoc idẽ theorema ostẽdere demõstratione affirmatiua: hac ratione. Posito. n. eodẽ antecedẽte, supponi intelligatur basis BC, basi E F: ita ut triangulum ABC, cadat in diuersas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulũ AEF. Aut igitur duo latera, nẽpe D F, F A, constituunt unã lineã

rectam

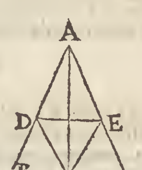
rectam, quod quidem continget, si duo anguli C,
& F, recti extiterint; aut non. Si cōstituant unam li
neam rectam, ueluti D A, ita propositum cōclude
tur Quoniam in triangulo A E D, duo latera A E,
D E, ponuntur æqualia (est enim nunc A E, recta
eadem quę A B, quæ per hypothesin rectæ D E,
æqualis est) erunt anguli A, & D, super basin AD, 5.primi.
ęquales, quod erat ostendendum. Si uero neque
D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam confi-
ciant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ
uel cadet intra triangula, uel extra. Cadat primo intra, quod qui-
dem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt
acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D,
duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, erunt
duo anguli E A D, E D A, æquales ad basim
D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, 5. primi
D F, æqualia sint per hypothesin, erunt duo
anguli F A D, F D A, super basin D A, æqua
les. Si igitur hi ęquales illis ęqualibus addā-
tur, fient toti anguli E A F, E D F, ęquales. Quod erat ostenden
dum. Cadat secundo recta D A, extra trian- 2. pron.
gula, quod demum fiet, quando anguli ad F,
fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo
A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqua
lia, erunt anguli E A D, E D A, æquales su-
per basin D A. Eadem ratione, cum duo la- 5. primi
tera A F, D F, in triangulo A F D, sint per
hypothesin æqualia, erunt anguli F A D,
F D A, super basin D A, æquales. His er-
go a prioribus ablatis, remanebunt anguli E A F, E D F, æqua- 3. pron.
les; Quod demonstrandum proponebatur.





PROBL. 4. PROPOS. 9. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.



Sit diuidendus rectilineus angulus
B A C, bifariam, hoc est, in duos angulos
æquales. In recta A B, sumatur quodcunq;
punctū D, & rectæ A D, secetur ex A C, re 3. primi
cta A E, æqualis, ducaturque recta D E.
Deinde super D E, constituatur trian-
gulum æquilaterum D F E, & ducatur 1. primi
recta A F, diuidens angulum B A C,
in angulos B A F, C A F. Dico hos

augnols

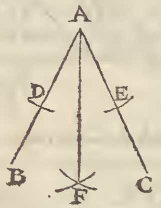
angulos inter se esse æquales. Cum enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia sint lateribus E A, A F, trianguli E A F, utrumque utrique, quod D A, ipsi E A, per constructionem, sit æquale, & A F, commune; Sit autē & basis D F, basi E F, æqualis, propterea quod triangulum D F E, constructum sit æquilaterum Erit angulus D A F, angu-
8. primi lo E A F, æqualis, ideoque angulus B A C, diuisus bifariam, quod erat faciendum.

SCHOLION.

Qvod si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilo minus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

Dicto citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, *bifariā secabitur, hoc modo. Ex centro* A, *circino aliquo abscindantur rectæ æquales* A D, A E, *cuiuscunque magnitudinis. Et circino non uariato (posses tamen ipsum uariare, si velles) ex centris* D, & E, *describantur duo arcus secantes sese in* F. *Recta igitur ducta* A F, *secabit angulum* B A C, *bifariam. Si enim ducerentur rectæ* D F, E F, *essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum* D A F, *æqualem esse angulo* F A F. *Non descripsimus autem dictas lineas, ut nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatq; confusionem.*



SCHOLION.

Hinc aperte colligitur, angulū rectilineū quemuis diuidi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum uterque iterum bifariam secetur, habebi-

habebimus 4. angulos æquales; Quod si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides usquam, neque ab ullo hactenus fuit demonstratum, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales possit diuidi. Si quis tamen id desideret, uti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunque interuallum, secans rectas AB, AC, in B & C. Deinde hic arcus officio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam; quoniam huius rei demonstratio adhuc desideratur) diuidatur in tot partes æquales in quot angulus propositus est diuidendus, vt iuxta exemplum propositum in quinque, in punctis scilicet D, E, F G. Si namque ad hæc puncta ex A rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cũ enim circino sumpta sint æqualia interualla B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D, D E, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli BAD, æqualia duobus lateribus E A, A D triãguli E A D, utrumque vtrique, cũ omnia ex centro egrediantur ad circumferentiã usque; Basis autẽ BD basi quoque DE, vt dictũ fuit, æqualis est: Angulus igitur B A D angulo E A D æqualis existet; Eademq; ratione demonstrabitur, angulum E A D angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circunferentiæ B D, D E, &c. acceptæ sint omnes æquales inter se se. Nemo uero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus dependent. Hoc enim eo consilio facimus, vt singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales; Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, ubi eandẽ diuidit Euclides bifariã, & ita de singulis. Neq; enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes

15. def.

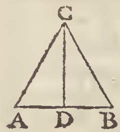
8. primi

tiones, sed solum, ut probetur recte esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationẽ requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum et in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.

10.
PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

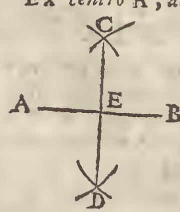
SIT recta finita A B, diudenda bifariam, ideſt, in duas
1. primi partes æquales. Describatur super A B, triangulum æqui-
9. primi laterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, diuidatur bifariam in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, utrumque utrique, nempe A C, ipsi B C, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune;



4. primi Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per constructionem: Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.

P R A X I S.

Ex centro A, ad quoduis interuallũ, quod tamen dimidiũ lineæ A B, excedat, describãtur duo arcus, unus superne, alter inferne; Et ex cẽtro B, ad idẽ interuallũ omnino alij duo arcus delineentur, q priores secẽt in C, & D. Recta igitur ducta C D, secabit rectã A B in E, bifariã. Si.n. ex A, & B, ad C, & D, ducant quatuor rectæ, erũt hæ oẽs inter se æquales, cũ ex cẽtris ad circũferentias æqualiũ circulorũ cadãt; Nã arcus circulorũ descripti sũt eodẽ interuallo. Quoniã igit̃ latera AC, CD, æqualia sunt lateribus



teribus B C, C D, vtrumq; vtriq; & basis A D, basi B D, erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera 8.primi.
A C, C E, æqualia sunt lateribus B C, C E, vtrumq; vtriq; , & angulus A C E, angulo B C E, vt ostensum fuit; erit basis A E, 4.primi.
basi B E, æqualis.

SCHOLION.

PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineā rectā A B, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quæuis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, vberrime trademus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, et nō iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes linearum proportiones exposcant. Neq; vero indigebimus vnquam diuisione lineæ in quotlibet partes æquales, ad eum locum vsq;.

PROBL. 6. PROPOS. 11. 11.

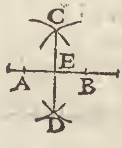
DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectā lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit A B, & in ea punctū C, a quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D, cui æqualis auferatur C E. De- 3.primi.
inde super D E, constituatur triangulum æquilaterum 1.primi.
D E F, atq; ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumq; vtriq;, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, commune; Est vero & basis D F, basi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: Erunt anguli ad C,
contenti dictis lateribus, æquales. Quare dicetur vterq; re- 8.primi.
ctus, atq; adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data 10. de f.

igitur recta linea a pũcto in ea dato &c. quod faciendũ erat.

PRAXIS.

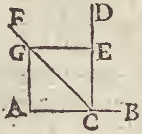
Ex puncto C, abscindantur vtrinq; lineæ æquales C D, C E. Et ex D, & E, describantur duo arcus secantes se se in F. Recta namq; ducta F C, erit perpendicularis: Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ D F, E F, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit A C, & punctũ datũ C, extremũ; protrahenda erit A C, in B, & sumendæ æquales C D, C E, &c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcumq;, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis



A, & B, quibuscunq; lineæ propositæ describantur tam superne, quam inferne duo arcus se se intersecantes in C, & D. Nam recta ducta C D, erit perpendicularis ad A B. hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra praxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases A E, B E, consistunt, opponunturq; æqualibus lateribus A C, B C.

EX PROCLO.

Si punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis C D, vt docuit Euclides; & abscinda-

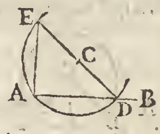


3.primi. tur C E, æqualis ipsi A C: Deinde diuidatur an-
9.primi. gulus C, bifariam, ducta recta C F; Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpendicularis

dicularis ad C D, secans rectã C F, in G. Ducta igitur recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam cum latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia sint lateribus E C, C G, triãguli E C G, vtrumque vtrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri C G, æquales; Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, ideoq; A G, ad A B, perpendicularis. 4. primi. 10. def.

SCHOLION.

Brevivs lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea A B, *punctumq; in ea* A. *Ex centro* C, *extra lineã assumpto, vbi libuerit, (dũmodo recta* A B, *producta cum ipso non cõueniat) interuallo vero accepto vsq; ad* A, *describatur arcus circuli secãs* A B, *in D.*

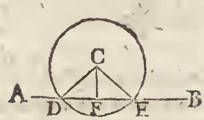


Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta igitur ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, est rectus, cùm sit in semicirculo D A E, vt ostendemus propositione 31. lib. 3.

PROBL. 7. PROPOS. 12. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Sit recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B.



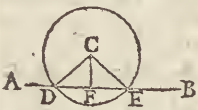
Cẽtro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam A B; alias eam non secaret.) Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularẽ esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, 1. primi.

 FC,

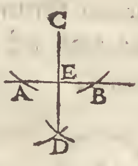
F C, trianguli, E F C, vtrumq; vtriq;, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, æqualis, cum hæ sint ex
8. primi. centro C, ad circunferentiam: Quare erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterq; rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

SCHOLION.

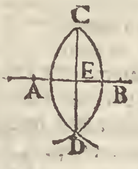
PROBE apposuit Euclides hāc particulam: infinitam. *Si enim linea esset finita, non posset semper a puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset* B E. *& punctum C, non posset ex C, describi circulus secans* B E, *in duobus punctis, quare neq; ex C, perpendicularis duci ad* B E *Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si* B E, *producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totam* B A, *productam in D, & E, &c.*



PRAXIS.



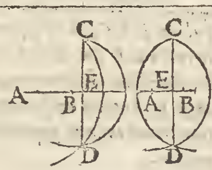
CENTRO C, & interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, *&* B. *Deinde ex* A, *&* B, *eodēq; interuallo, vel alio si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta C D, secans* A B, *in E, erit perpendicularis ad* A B. *Demonstratio huius operationis non differt a demonstratione tradita in praxi propositionis* 10.
4. primi. *Nam anguli ad E, erūt recti, nempe inter se æquales.*



IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis pūcto A, in linea data & interuallo vsq; ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, *interualloq; vsq; ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D; Eritq; ducta recta C D, secans* A B, *in E, perpendicularis ad* A B.

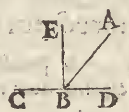
Demon

Demonstratio eadem est quæ prior. Non est autem necesse, vt interuallum B C, æquale sit interuallo A C, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio si idem semper interuallum accipiatur.



THEOR. 6. PROPOS. 13. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineã angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA A B, cõsistens super rectam CD, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B fuerit perpendicularis ad C D, erũt dicti anguli duo recti. Si vero A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum; alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero duo anguli D B A, A B E, æquales sunt angulo recto E B D; apposito communi angulo recto E B C, erunt tribus angulis D B A, ABE, EBC. æquales duo recti EBD, EBC: Rursus quia duo anguli A B E, E B C, æquales sunt angulo A B C; apposito communi angulo A B D, erunt tribus angulis D B A, ABE, E B C, æquales duo anguli ABC, ABD: sed illis tribus ostensum fuit esse etiam æquales duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, inter se sunt æqualia: Duo igitur anguli ABC, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cum ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

10. def. *11. primi.* *18. pron.* *2. pron.* *18. pron.* *2. pron.* *1. pron.*

SCHOLION.

VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B *C, superat rectum angulum*

gulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur, siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

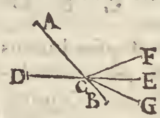
14.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

AD punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A C, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse constitutas in directum, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim nõ est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit supra, cũ A C, consistat super rectam D C F, fient duo anguli A C D, A C F, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo angulo A C D, A C E, æquales duobus rectis; & omnes recti sunt inter se æquales: Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt æquales. Ablato igitur communi angulo A C D, remanebunt anguli A C F, A C E, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdũ. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, æquales. Igitur D C, producta cadem efficietur, quæ C E; propterea q;, si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, &c.

13. primi. *3. pron.*



Quod demonstrandum erat.

SCHO-

SCHOLION.

Est hæc propoſitio præcedentis conuerſa. In ea enim probatum fuit, ſi D C E ſit recta, angulos A C D, A C E, duobus eſſe rectis æquales; In hac vero demonſtratum eſt, ſi dicti anguli ſint duobus rectis æquales, rectas D C, E C, eſſe vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

Recte Euclides addidit in propoſitione hac: & non ad eaſdem partes. Quoniam vt ait Porphyrius, fieri poteſt, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad eaſdem partes duæ lineę ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non conſtituant vnam lineam, eo quod non ad diuerſas ſint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Duca-

tur C D, perpendicularis ad A B, diuidaturq; re-
ctus angulus A C D, bifariam per rectam C E. 11.primi.
Deinde ex D, quolibet puncto rectæ C D, ducatur 9.primi.
D F, perpendicularis ad C D, ſecans rectam C E, 11.primi.
in E. Producta autem E D, ad partes D, ſumatur
D F, æqualis rectæ D E, & ducatur recta F C. 3.primi.
Quoniam igitur latera E D, D C, trianguli E D C,
æqualia ſunt lateribus F D, D C, trianguli F D C,
vtrumq; vtriq;, & anguli D, ipſis contenti æqua-
les, nempe recti; erit baſis E C, baſi C F, æqualis, & angulus
E C D, angulo F C D. Sed angulus E C D, dimidium eſt recti: 4.primi.
(Eſt enim rectus A C D, diuiſus bifariam.) Igitur & F C D, dimidium erit recti. Quare C F, cum A C, facit angulum A C F, conſtantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem C E, cum eadem A C, angulum A C E, dimidium etiam recti: Duo igitur anguli A C F, A C E, quos ad eaſdem partes faciunt rectæ C F, C E, cum A B; æquales ſunt duobus rectis: Et tamen C F, C E, non ſunt vna linea recta, propterea quod non ſunt ductæ ad diuerſas partes, ſed ad eaſdem.

THEOR. 8. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticē æquales inter ſe efficiēt.

Secent ſe duæ rectæ AB, CD, in puncto E, vtcūq;. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter ſe eſſe æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C,

& angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, erunt duo anguli A E D, D E B,
13. primi — æquales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erũt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis æquales. Cum igitur omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli

10. pron.

3. pron. — A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æquales. Dempto igitur cõmuni angulo D E B, remanebit angulus A E D, angulo B E C, æqualis. Eadem ratione confirmabitur; angulos A E C, B E D, inter se æquales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, (qui duobus sunt rectis æquales per præcedentem) æquales erunt duobus angulis D E B, B E C, (qui per eandem præcedentem duobus rectis sunt æquales.)
3. pron. — Ablato igitur angulo communi B E C, remanebunt anguli A E C, B E D æquales inter se. Si igitur duę rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM. I.

Evclides colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent). duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos A E D, D E B quam duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

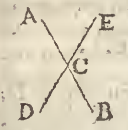
COROLLARIVM. II.

Eadem ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor ad E, constituti in plu-
18. pron. — rimas partes, quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circunstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt, quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX PRO-

EX PROCLO.

Si ad aliquam rectam lineam, ad eiusq; signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erũt.



Ex puncto C, rectę A B, in diuersas partes egrediantur duę rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter se ęquales: Vel etiam duos A C D, B C E. Dico duas C D, C E, efficere vnã lineam rectam. Quoniam cum angulus A C E, æqualis sit angulo B C D, addito communi angulo B C E, erunt duo anguli A C E, E C B, duobus 2. pron.
angulis D C B, B C E, æquales: Sed anguli A C E, E C B, sunt 13. primi.
æquales duobus rectis; Igitur & duo D C B, B C E, duobus erunt
rectis æquales. Quamobrem C D, C E, erunt linea vna recta. 14. primi.
Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæ quintæ.

EX PELETARIO.

Si quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctę.

EX puncto A, quatuor lineę eductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppositos B A E, C A D, inter se æquales: Item duos B A C, D A E, inter se æquales. Dico tam B A, A D, facere vnã lineam rectam, quam C A, A E. Quoniam æquales sunt anguli B A E, C A D, si æquales illis addantur
anguli B A C, D A E, erunt duo anguli B A E, B A C, æquales 2. pron.
duobus angulis C A D, D A E. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli B A E, B A C, æquales sunt duobus
rectis; atque adeo C A, A E, vnam efficient lineam rectam. 4. primi.
Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli B A E, B A D, æquales duo

les duobus angulis D A C, C A B; Quare vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione du cente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.

16. THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto; externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D;
Dico angulum externum D A C, maiorem esse interno,
& opposito A C B, itemq; maiorem interno, & opposito
10.primi. A B C. Diuidatur enim A C, bifariam in E; & ex B, per E,
extendatur recta B E F, ita vt E F,
3.primi. abscissa sit æqualis rectæ E B; du-
catur q; recta F A. Quoniam igi-
tur latera C E, E B, trianguli CEB,
æqualia sunt lateribus A E, E F,
trianguli A E F, vtrumq; vtriq;,

per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis la-
15.primi. teribus comprehensi, inter se æquales, cum sint circa verti-
4.primi. cem E, & oppositi: Erit basis C B, æqualis basi A F, & an-
gulus E C B, angulo E A F; Est autem angulus D A C,
externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur
& externus angulus D A C, maior erit interno, & opposi-
to angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; &
A B, diuidatur bifariam in H; extendaturq; recta C H I,
vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demon
strabitur eadem prorsus ratione, angulum externum G A B,
maiorem esse interno angulo, & opposito A B C: Est au-
15.primi. tem angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cũ lineæ B D,
C G, se mutuo secent in A. Igitur & angulus D A C, ma-
ior erit interno & opposito angulo A B C. Est autem
idem angulus D A C, maior quoq; ostensus angu-
lo interno, & opposito A C B. Cuiuscunque
ergo trianguli vno latere producto, &c.
Quod demonstrandum erat.

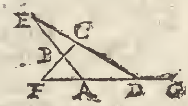
SCHO-

SCHOLION.

NON dixit Euclides angulum externum D A C, maiorẽ esse angulo B A C, interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtrumlibet A C B, A B C, internorum, sibiq; oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoq; erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit: Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. Nam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID vero, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti, cũ & vno latere figuræ quadrilateræ producto, extern⁹ angul⁹ quolibet interno, & opposito possit esse maior; hac rõne absoluem⁹.

SIT figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtusus, & A B C, rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ A B, D C, productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ D A, C B, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Dico, si A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem esse tribus internis B A D, A B C, B C D, sibi oppositis. Cũ enim A D E, triangulum sit, erit angulus externus E D G, maior interno opposito D A E. Rursus cum D A B, obtusus maior sit recto A B C, maior quoq; multo erit E D G, ipso A B C. Postremo, quia & in triangulo C D F, angulus externus C D G, maior est interno, & opposito F C D; manifestum est, in quadrilatero A B C D, externum angulum C D G, maiorem esse internis, & oppositis B A D, A B C, B C D. Quã ob rem propositio hæc 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.



16. primi.

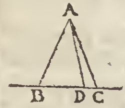
16. primi.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemq; lineã rectã non posse duci plures lineas rectas, quã dua-

inter

inter se æquales. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad lineam



B C, tres lineæ rectæ æquales A B, A C, A D. Quoniam igitur latera A B, A C, ſunt æqualia,

5. primi. erunt anguli A C B, & A B C, æquales ſuper baſim B C: Rurſus quia latera A B, A D, ſunt æqua

5. primi. lia, erunt anguli A D B, & A B C, ſuper baſim B D, æquales. Quare cum vterq; angulus A C D,

1. pron. & A D B, æqualis ſit angulo A B C, erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno oppoſito, quod eſt abſurdum, cum per hanc 16. propoſ. externus interno maior ſit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter ſe æquales, ex A, ad B C, poſſunt duci. Quod eſt propoſitum.

17. THEOR. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.

SIT triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores eſſe duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemq; duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D,

16. primi. & E. Quoniam igitur angulus A B D, externus maior eſt interno & oppoſito angulo A C B, ſi addatur communis

4. pron. angulus A B C, erunt duo anguli A B D, A B C, maiores

13. primi. duobus angulis A B C, A C B; ſed A B D, A B C, æquales ſunt duobus rectis; Igitur A B C, A C B, minores ſunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis: Item duo B A C, & B C A. Cuiuſcunq; igitur trianguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

EX PROCLO.

HINC perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quã vnã.

Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum ſint duo recti, quod eſt abſurdũ.

17. primi. Sunt enim quilibet duo anguli in triãgulo quocunq; oſtenſi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendicu-

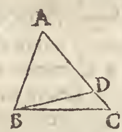
pendiculares, quam vna, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.

COROLLARIVM.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunq; reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

THEOR. 11. PROPOS. 18. 18.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



IN triangulo A B C, sit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, subtensum a maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui a minori latere A B, subtenditur. Nā ex A C, auferatur A D, æqualis ipsi A B, (3. primi.) & ducatur recta B D. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia sunt per constructionē, erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem angulus A D B, maior angulo A C B; (5. primi. 16. primi.) Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrem cum angulus totus A B C, maior adhuc sit angulo A B D; (9. pron.) Erit angulus A B C, multo maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendes angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

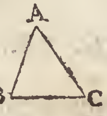
EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 25. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum A B C, cuius maximum quidē latus A C, minimū autem B C; & medium locum habens A B. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit, per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior

erit an-erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus uero A; & C, mediũ locũ inter vtrũq; tenẽs.

18.

THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus A C, ſubtendens maiorem angulũ B, maius eſſe latere A B, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus A C, maius non eſt latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale eſſe ipſi A B, erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si vero A C, minus eſſe dicatur latere A B, erit angulus B, ſubtenſus a minori latere A C, minor angulo C, ſubtenſo a maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdũ. Cũ igitur A C, latus neq; æquale ſit lateri A B, neq; minus eo, erit maius. Eadẽ ratione probabitur, latus A C, maius eſſe latere B C, ſi angulus B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum proponebatur.

5. *primi.*

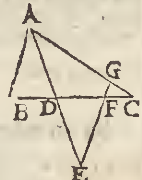
18. *primi.*

EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idẽ theorema oſtẽdere affirmatiua demonſtratione, ſine adminiculo præcedentis, ſi tamen prius demonſtretur hoc ſubſequens theorema.

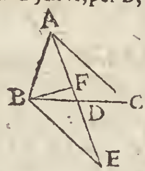
SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit; ſecansq́, angulum recta linea ad baſin ducta in partes inæquales ipſam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit, minus vero, quod cũ minori.

TRIANGVLI A B C, angulus BAC, diuidatur bifariã per rectã A D, quę ſecet baſin B C, in partes inequales, maiuſq; ſegmentum tũ ſit D C. Dico latus A C, maius eſſe latere A B. Producatur enim A D, ad E, vt ſit D E, æqualis ipſi A D; Deinde 3. *primi* ex maiori ſegmẽto D C, auferatur recta D F, æqualis minori ſegmẽto D B, & p F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, triãguli A D B, æqualia sũt lateribus E D, D F, triãguli E D F, vtrũq; vtriq;, per cõſtructionẽ; ſunt aũt & anguli A D B, E D F, dictis 15. *primi.* lateribus cõtenti æquales; Erunt baſes A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, 4. *primi.* æqualis: Eſt vero & angulus C A D, angulo



B A D, æqualis, p hypotheſin; Igitur anguli G A D, G E A, trianguli 1. *pron.* A G E, æquales erũt, ideoq; latera A G, E G, æqualia erũt. Eſt aũt 6. *primi.* recta A C, maior quã A G; quare & A C, maior erit, quã E G; Et qa E G, maior eſt, quam E F, erit & A C, multo maior, quam E F. Cum igitur demonſtratum ſit rectam E F, æqualem eſſe rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat oſtendendum.

H o c oſtenſo theoremate, ita propoſitio 19. demonſtrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior ſit angulo C. Dico latus A C, maius eſſe latere A B. Diuiſa enim recta B C, (ſuper quam conſtituti ſunt dicti anguli inæquales,) bifariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E, vt ſit D E, æqualis ipſi 3. *primi.* A D; ducaturq; recta B E. Quoniam igitur latera A D, D C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrũq; vtriq;, per conſtructionem; ſunt autẽ & anguli A D C, 15. *primi.* E D B, dictis comprehenſi lateribus æquales: Erũt baſes A C, & B E, æquales, anguluſq; A C D, an- 4. *primi.* gulo E B D, æqualis: Et quia angulus A C D, ponitur eſſe minor angulo A B C, erit & angulus



E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoq; angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam ſecetur per rectam B F, cadet B F, ſupra B D, eo quod angulus A B D, maior ſit angulo E B D. Quia vero E F, maior eſt, quam 9. *pron.* E D, & E D, poſita eſt æqualis ipſi A D, erit E F, maior, quã A D; Sed adhuc A D, maior eſt, quã A F; Multo igitur maior erit E F, 9. *pron.* quam A F. Itaq; quia recta B F, diuidens angulum A B E, bifariã, ſecat baſin A E, inæqualiter in F, eſtq; maius ſegmentum E F, minus aũt A F, erit per theorema a Proclo proxime demõſtratũ, latus B E, maius latere A B. Oſtẽſum eſt aũt B E, æquale eſſe lateri A C; Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Qđ erat demonſtrandũ.

S C H O L I O N.

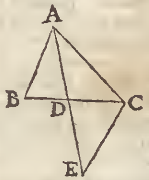
H a e c propoſitio 19 cõuerſa eſt propoſitionis 18, vt perſpicuũ eſt. Campanus autem duarũ iſtarũ propoſitionũ ordinẽ prorſus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos eſt 18. apud ipſum ſit 19. & contra. Quarum vtramque oſtendit ducendo ad id,

quo:

quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.

P o t e r i m v s *quoque Theorema a Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.*

S i trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq́; segmentum erit prope maius latus.



D v o *latera AB, A C, trãguli ABC, sint inæqualia; A C, maius, & A B min⁹ Recta autem A D, diuidẽs angulũ BAC, bifariã, secet basin B C, in D. Dico segmentum D C maius esse segmẽto D B. Si enim nõ est maius, erit vel æquale vel minus. Si dicatᷣ esse æquale; producatur A D, ad E,*
3. primi. *vt D E, æqualis sit ipsi D A, ducaturq́; recta E C. Quoniam igitur latera A D, D B, æqualia sunt lateribus E D, D C, vtrumq; vtriq; ; A D, videlicet ipsi E D per constructionem, & D B ipsi D C, per hypotesin aduersarij; Sunt autem & an-*
15. primi. *guli ad D dictis lateribus contenti æquales: Erit basis A B,*
4. primi. *basi E C, æqualis, & angulo B A D, angulus C E D. Positus autẽ est & angulo B A D angulus C A D, æqualis; Igitur &*
6. primi. *anguli C E D, C A D æquales erunt; Ideoq́; latus A C lateri E C, æquale. Cũ igitur ostensum sit, lateri E C, æquale esse quoq;*
1. pron. *latus A B, erunt latera A C A B, æqualia; quod est absurdũ, quia A C, maius ponebatur, quã A B Non igitur erit segmentum D C, segmento D B, æquale. Quod si D C, dicatur esse minus, & D B, maius; erit, per theorema Procli latus A B, maius latere A C; Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit D C, quam D B. Quare erit necessario maius.*

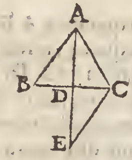
E o d e m *modo demonstrari poterit hoc theorema.*

S i trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoq; secet, erunt duo

latera

latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMO recta A D, secans angulum B A C, bifariam, diuidat quoque basin B C, in D, bifariam; Dico latera A B, A C, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabis eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus A C, æquale esse lateri A B, si D C, segmentum segmento D B æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum



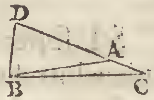
enim latera A D, D B, æqualia sint lateribus E D, D C; & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales; erunt bases A B, E C, æquales, & angulus C E D, angulo B A D, hoc est, angulo C A D, æqualis: Quare A C, æquale erit ipsi E C, hoc est, ipsi A B. 15. primi. 4. primi 6. primi

SECVNDO sint latera A B, A C, æqualia, & recta A D, secans basin B C, in D, diuidat angulum B A C, bifariam; Dico segmentum D C, æquale esse segmento D B. Cum enim latera A D, A B, æqualia sint lateribus A D, A C, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin; erũt bases B D, D C, æquales. 4. primi

THEOR. 13. PROPOS. 20. 20.

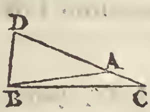
OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur vnum ex illis, ut C A, usque ad D, sitque recta A D, æqualis alteri lateri A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter se sunt, per hypo- 3. primi



F thesin,

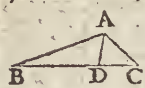
5. primi thesin, erunt anguli A B D, A D B, æquales inter se: Est au-
9. pron. tem angulo A B D, maior angulus C B D; Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In



19. primi triangulo ergo C B D, latus C D, oppositum maiori angulo C B D, maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cum igitur duo latera A B, A C, simul æqualia sint ipsi C D, (si enim
2. pron. æqualibus A B, A D, commune addatur A C, fient tota æqualia; nimirum linea composita ex A B, A C, & linea cõposita ex A D, A C,) erunt quoque latera A B, A C, simul maiora latere B C. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLO.

Aliter hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora esse latere B C. Diuidatur angulus B A C,



9. primi illis lateribus contentus bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum est ad B, erit angulus externus
16. primi B D A, maior interno & opposito C A D; igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B,
19. primi oppositum maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus A C, maius esse, quam
16. primi C D, quia angulus C D A, maior est angulo B A D, hoc est, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademque est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.

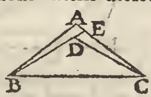
21. THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI super trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt,

maio-

maiorem uero angulum continebunt.

IN triangulo A B C, super extremitates B, & C, lateris
B C, intra triangulũ cõstituãtur duæ rectæ lineæ B D, C D,
in puncto D, concurrentes: Dico B D, C D, simul mino-
res esse duobus lateribus B A, C A, simul; At uero angulũ
B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera
linearum interiorum, nempe B D, ad pun
ctum E, lateris C A. Quoniam igitur in
triangulo B A E, duo latera B A, A E, ma 20.primi.
iora sunt latere B E. si addatur commune
E C, erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rursus 4. pron.
quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, maiora sunt 20.primi.
latere C D; si commune apponatur D B, erunt C E, E B, ma
iora, quam C D, D B. Ostensum uero iam fuit B A, C A, 4. pron.
maiora esse, quam B E, E C; Multo igitur maiora erunt
B A, C A, quã B D, C D. quod primo proponebatur. Præ-
terea, quoniam angulus B D C, maior est angulo D E C, 16.primi.
externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior
quoque est eandem ob causam; Erit angulus B D C, multo
maior angulo B A C; quod secundo proponebatur. Si igi
tur super trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod
erat ostendendum.

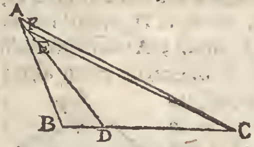


SCHOLION.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus unius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis uidelicet rectangulis, uel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super unum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem una ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, ita vt hæ constitutæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

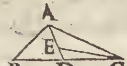
EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A BC, obtusum. Dico ab extremo C, & a quouis puncto, nempe a D, prope
aliud extremum B, lateris BC, duci posse duas lineas intra trian-



gulum ad aliquod punctum, quæ ma
iores sint duobus lateribus B A, AC.
Ducatur enim recta D A: Et quoniã
in triangulo A B D, duo anguli
17. primi. A B D, A D B, minores sunt duobus
rectis; Ponitur autem A B D, ma-
ior recto, nempe obtusus; erit ADB,
19. primi minor recto, ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, ma-
3. primi ius erit latere A B. Ex D A, abscindatur recta D E, æqualis rectæ
10. primi A B; Et reliqua linea A E, bifariam diuidatur in F. Si igitur ab ex
tremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duę lineę rectæ constitu-
tę C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C.
Quoniam in triangulo A F C, duo latera A F, F C, maiora sunt
20. primi latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, ęqualis, per constru-
ctionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur
4. pron. ęqualia addantur E D, & A B, fient rectę C F, F D, maiores lateri-
bus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extre-
mo recta duceretur, essent duæ rectę constitutę C F, B F, minores
duobus lateribus C A, A B, ut Euclides demonstrauit.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximũ
3. primi BC, minimum A B. Ex B C, auferatur B D, æqualis rectæ A B, &



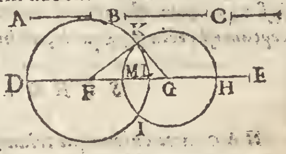
ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet,
ut ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Con-
stitutę igitur erunt intra triangulum duę lineę
C E, D E, quę minorem angulum comprehendũt
eo, quẽ efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim
5. primi duo latera B A, B D, ęqualia sint, erunt duo anguli B A D, B D A,
16. primi ęquales: Sed B D A, angulus maior est angulo C E D; Maior igi-
tur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit
totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Recte
igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas
educi debere ab extremis punctis unius lateris, ut minores quidẽ
sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem uero complectan
tur angulum. Alias enim propositio uera non esset, ut iam est
demonstratum.

22. PROBL. 8. PROPOS. 22.

EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus
datis rectis lineis æquales, triangulum con-
stituere

ſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam uniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

Tres lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, ut conſtat ex propos. 20, in qua oſtenſum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oporteatque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis abſcindatur recta D F, æqualis rectæ A, Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C.



3. primi

Deinde centro F, interuallo uero F D, circulus deſcribatur D I K: Item centro G, interuallo autem G H, alius circulus deſcribatur H I K, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K; (cum enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; ſi ex F E, ſumatur recta F L, æqualis ipſi F D; & ex G D, recta G M, æqualis ipſi G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namq; M, caderet in L, punctum, eſſent G L, F L, hoc eſt, G H, & F D, æquales rectę F G: Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ minores recta F G; quorum utrumq; eſt contra hypotheſin.) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducatur ad puncta F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A, B, & C. Cum enim recta F K, æqualis ſit rectæ F D, & recta A, per conſtructionem eidem F D, æqualis; erit latus F K, rectæ A, æquale: Rurſus quia G K, æqualis eſt ipſi G H, & recta C, eidem G H; erit quoq; latus G K, rectæ C, æquale: Poſitum autem fuit per conſtructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia ſunt. Cōſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

15. def.

1. pron.

PRAXIS.

SVMATVR recta D E, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin: Deinde ex D ad interuallũ rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus D F, æquale rectæ A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus E F, ipsi C, propter assumptum interuallum C; D E, vero latus, acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.

SCHOLION.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq; & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque A BC, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, BC, CA,

20.primi *quarum quælibet duæ maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam D E, æqualem uni lateri, nempe B C; & ex D interuallo lateris A B, arcum describo, item aliũ ex E, interuallo reliqui lateris C A, qui priorẽ secet in F, &c.*

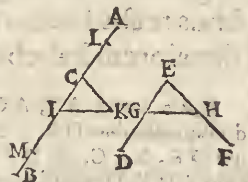
23. PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta utcunque G, H, quæ recta

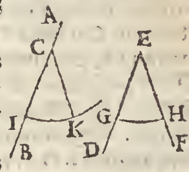
22.primi. G H, connectantur: Deinde constituatur triangulum C I K, habens

habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita ut C I, æquale sit ipsi E G; & C K, ipsi E H; & I K, ipsi G H. (Quod facile fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G; & C L, ipsi E H; & I M, ipsi G H; Deinde ex centris C, & I, interuallis uero C L, & I M, circuli describantur secantes se se in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam duo latera C I, C K, æqualia sunt duobus lateribus E G, E H, vtrumq; vtrique, & basis I K, basi G H, per constructionem; erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. 8.*primi.*



PRAXIS.

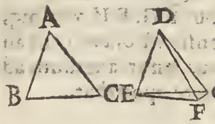
Non differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulũ constituere oporteat æquale alteri triangulo, ut angulus dato angulo æqualis exhibeatur, ut perspicuũ est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumq; in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq; officio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quod circino non variato vtramque distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; erunt anguli I C K, G E H, æquales. 8.*primi.*



THEOR. 15. PROPOS. 24. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

Dvo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, utrumque utrique; nēpe A B, ipsi D E; & A C, ipsi D F; Angulus uero A, maior sit angulo E D F. Dico basin B C, maiorem esse base E F. Ad lineam enim D E, ad eiusque punctū D, constituatur angulus E D G,



23. primi æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cùm angulus E D F, minor ponatur angulo A) ponaturque D G, æqualis

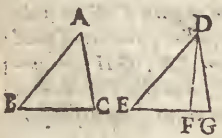
3. primi ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam: Cadat primo supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G utrumq; utrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constru-

4. primi ctionem; Erit basis B C, basi E G, æqualis. Rursus quia duo

5. primi latera D F, D G, inter se sunt æqualia; erunt anguli D F G,

9. pron. D G F, æquales: Est autem angulus D G F, maior angulo E G F: Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eo-

19. primi dem angulo E G F. In triangulo igitur E F G, maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, quam E F. Quod est propositum.



Cadat secundo E G, in ipsam E F. Et quia rursus, ut prius,

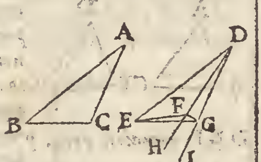
4. primi. basis E G, æqualis est basi B C: Et

9. pron. E G, maior quam E F: erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum.

Cadat tertio E G, infra E F; producanturque rectæ D F, D G, usque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit au-

4. primi. tem rursus, ut prius, basis E G, basi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia sunt inter se, per constructionem

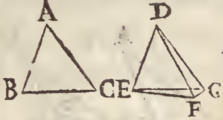
ctionem; erũt anguli G F H, F G I, infra basin F G, æquales: 5. primi
Est autem angulus F G I, maior angulo F G E; Igitur & angulus G F H, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo F G E. In triangulo ergo E F G, maius erit latus E G, latere E F. 9. pron.



19. primi.
Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, basis, basi E F. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

SI quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium; verum etiam triangulorum & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrunque vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorũ angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius trianguli, cuius angulus minor existit, ut demonstratum est; Non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37 huius primi libri, Triangulũ maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando uero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in uniuersum inferri, ex eo, quod angulus unius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo æquale sit, modo minus & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus A B C, minor

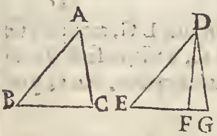


nor eſt ſemper angulo D E F; cum angulus D E G, (qui æqualis eſt, per 4. propos. angulo A B C,) minor ſit eodem angulo D E F, pars toto. In ſecunda autem figura, exiſtit quidem angulus A B C, angulo D E F, æqualis per 4. propos. At uero angulus A C B, mi-

9. pron.

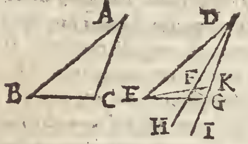
nor eſt angulo D F E, cum angulus D F E maior ſit angulo D G F, externus interno, & oppoſito; & angulus D G F, æqualis ſit angulo A C B.

16. primi.



In tertia denique figura angulus A B C, maior quidem eſt angulo D E F propterea quod angulus D E G, (æqualis exiſtens per 4. propos. angulo A B C,) maior ſit eodem angulo D E F, to-

9. pron.



tum parte: Sed angulus A C B, minor eſt angulo D F E. Nam ſi recta E F, producatur ſecans rectam D G, in K, fiet angulus D F E, maior angulo D K E,

16. primi

externus interno; Eſt autem & angulus D K E, maior adhuc angulo D G E, externus quoque interno, & oppoſito. Multo igitur maior erit angulus D F E, angulo D G E, qui per 4. propos. æqualis eſt angulo A C B. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero ſit maior, modo minor, & modo æqualis.

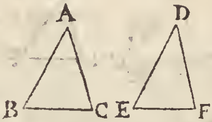
25.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, baſin vero baſi maiorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

Dvo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus

duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, utrumque utrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Basis autem B C, maior sit base E F. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus lateribus circa D, utrumque utrique, per hypothesin; erit & basis B C, æqualis basi E F; quod est absurdum; Ponitur enim basis B C, base E F, maior: Si uero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis E F, maior basi B C; quod magis est absurdum, cum E F, ponatur esse minor quam B C. Quare cum angulus A neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint &c. Quod erat ostendendum.



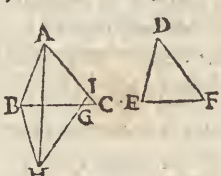
4.primi.

24.primi

SCHOLION.

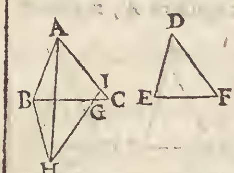
THEOREMA *hoc conuersum est præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est basin illi respondentem, esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostensum fuit angulũ illi respondentem, maiorem esse. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata sunt in propos. 18, & 19. Nam in 19 demonstratum est, in uno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera unius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq; discrimen reperies inter propos. 18. & 25.*

MENELAVS *Alexandrinus, ut ait Proclus, demonstrat hoc idẽ theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex base maiore B C, abscindatur recta B G, æqualis basi minori E F.* 3.primi. *Fiat quoque angulus G B H æqualis angulo D E F,* 23.primi. *& sit BH, æqualis ipsi B A,* 3.primi. *atque adeo ipsi D E,*



duca-

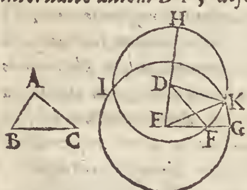
ducaturq; recta per G, ex H, secans A C, in I. Quoniã igitur
5. primi duo latera B A, B H, æqualia sunt, erunt anguli B A H, B H A, æquales. Rursus quia latera B G, B H, æqualia sunt lateribus E F, E D, vtrumque vtrique; & angulus G B H, æqualis angulo D E F, per constructionem; erit basis H G, basi D F; atque adeo ipsi A C, æqualis, angulusque G H B, angulo E D F. Et quoniam recta H I, maior est quam H G, quæ est æqualis ipsi AC, erit quoque maior H I, quam A C;



4. primi

9. pron. Sed A C, maior est adhuc, quam A I; Multo ergo maior erit
8. primi H I, quam A I. Quare angulus I A H, maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui
4. pron. ostensi sunt æquales, fiet totus angulus B A C, toto angulo B H G, maior: Sed angulus B H G, demonstratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod est propositum.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor E F,
3. primi ad G, ut sit E G, æqualis basi maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, describatur circulus, producaturque E D, ad H, in circunferentiam.
15. def. Quoniam igitur D H, est æqualis
2. pron. ipsi D F, erit quoque D H, æqualis ipsi A C. Additis igitur æqualibus D E, A B, fient A C, A B, simul æquales toti H E: Sed A C,
20. prim. A B, simul maiores sunt quam B C, atque adeo quam E G; Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo E G, interfecabit rectam E H atque adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, æqualia sunt duobus lateribus D E, D K, utrumq; vtrique, (est enim D K æquale ipsi D F, per definitionem circuli; D F, autem positum est æquale lateri A C.) & basis B C, basi E K, æqualis; (cum E K æqualis sit ipsi E G, per definitionem circuli; E G, vero recta per constructionem facta sit æqualis

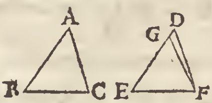


æqualis basi B C.) Erit angulus B A C; angulo E D K, æqualis: Sed angulus E D K, maior est angulo E D F. Quare & angulus A, angulo E D F, maior existet. Quod est propositum. 8. primi 9. pron.

THEOR. 17. PROPOS. 26. 26.

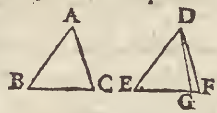
SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumq; latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, uterque vtrique, hoc est B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est A B, ipsi D E & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non est æquale lateri D E, sit D E, maius; a quo abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. 3. primi Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin; Erit angulus C, æqualis angulo E F G. 4 primi Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D; Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale. Quamobrem, cum



cũ latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; erunt & bases
4. primi A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

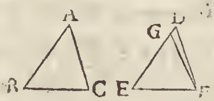
Sint secundo latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & B F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, utrumque vtrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; ex quo su-
3. primi matur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E,



4. primi æquales, per hypothesin; Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum.
16. primi Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Prior huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium B C, E F, & angulorum super has bases, demonstratũ est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus alterius, æqualia esse, reliquumque angulum reliquo angulo &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus

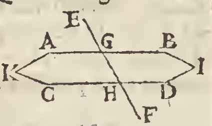


THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 27. 27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erũt inter se illæ rectæ lineæ.

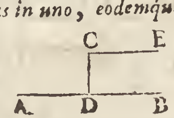
IN duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico lineas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum A B, recta continuata sit, item recta C D, usque ad punctum I,) & angulus A G H, positus est æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & opposito D H G;



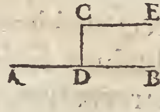
quod est absurdum; quoniam externus interno maior est. 16. primi
Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & opposito A G H. quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D; Quare parallelæ erũt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonstrabitur, lineas A B, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

NECESSE est, ut lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existant plano, ut ex definitione constat: Quare non satis est duos angulos alternos æquales inter se esse, ut duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in uno, eodemque existere plano. Fieri enim potest, ut linea recta incidẽs in duas rectas nõ in eodẽ plano existentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim CD, perpendicularis ad AB, rectam, quæ in subiecto plano existit; &



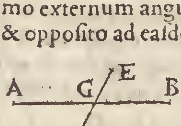
ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita ut punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito perspicuum est, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B facere duos angulos E C D, A D C, alternos æquales, cum sint recti; & tamen C E, A B, non sunt parallelæ, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, ut supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In vndecimo vero libro & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris disseritur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.



28.
THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erũt inter se ipsæ rectæ lineæ.

In duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniã angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C, & eidẽ angulo E G A, æqualis est angulus H G B; erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales: Quare lineæ A B C D, parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.



15. primi
1. pron.
27. primi

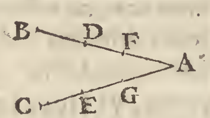
SECVN-

SECVNDO faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus, rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, duobus rectis æquales; Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdem partes, æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelę. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonstrandum. 13. primi.

SCHOLION.

IAMDVDVM pronunciatum vndecimum a principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propositio 29. illi innitatur, ita vt absq; eo demonstrari non possit, necesse est, vt illud ex hactenus demonstratis theorematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, cum Proclo confirmemus, vt antea polliciti sumus. Hoc autem facile præstabimus, si prius duo explicemus, quorum primum hoc sit.

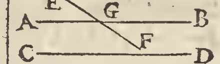
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT a puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quã D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectæ lineæ A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & lineæ ipsæ vltra

ultra produci, quod est absurdum cum ponantur infinite iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ A B, A C. producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam.
tex. 35. *Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cælo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum. Secundum, quod debet explicari, ita se habet.*

Si duarum parallelarum rectarum linearũ alteram secet quædam recta linea, reliquam quoq; productam secabit.



Sint duæ parallelæ A B, C D, & recta EF, secet ipsã A B, in G. Dico rectam E F. si producatur, secturam esse quoq; ipsam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G. angulum faciunt, si producantur infinite, excedunt omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela A B a parallela C D, distat, cum hæc distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia G B, a G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam G F, productam secuisse rectam C D. Nam quandiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia a G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, vndecimum pronunciatum.

Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

In rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico re-

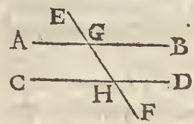
co rectas A B, C D, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, duobus rectis æquales; Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H. Ablato ergo communi angulo D H G, remanebit angulus D H F, maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, constituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K. supra G B, secabitq; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, æqualem interno, & opposito K G H; Erunt rectæ I K, C D, parallelæ. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G; Producta igitur secabit quoque ipsam C D, vt demonstratum est. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum. 13. primi. 5. pron. 23. primi. 28. primi.

QVAMVIS autem optime a Proclo demonstratum sit vndecimum hoc pronunciatum, vt iure inter theoremata possit referri; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato, præsertim cum facile ei assensus præberi queat, intellecta prius recte propositione 28. Si enim lineæ rectæ propositæ parallelæ sunt, ita vt nunquam coeant, sed semper æquali inter se distantia progrediantur, etiamsi infinite producantur, quando recta in eas incidens facit duos angulos internos, ad easdem partes duobus rectis æquales, vt demonstratum fuit; quis non videt, si eadem recta incidens in duas rectas faciat angulos internos ad easdem partes duobus rectis minores, alteram alteri appropinquare, ad eas partes, ad quas sunt interni anguli duobus rectis minores; quandoquidem æquali distantia procederent, si ijdem anguli paulo maiores essent, duobus videlicet rectis æquales, vt hæc propositio 28. demonstrauit? 28. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 29. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

In parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primũ, angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam



igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur communis angulus B G H, erunt duo A G H,
4. pron. B G H, maiores duobus D H G, B G H:
13. primi. At duo A G H, B G H, æquales sunt duobus rectis; Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes B, & D, coibunt lineæ A B, C D, ad
11. pron. eas partes. quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neq; minor; Eadem enim ratione ostenderetur rectas coire ad partes A, & C: Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eadẽq; est ratio de angulis alternis B G H, C H G.

Dico secundo, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniam angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum
15. primi. est; & eidem B G H, æqualis est angulus A G E; Erunt an-
1. pron. guli A G E, C H G, inter se quoq; æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G.

Dico tertio, angulos internos ad easdem partes, A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniã ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angu-
2. pron. lo C H G, interno; si addatur communis A G H, erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: sed duo
13. primi. A G E, A G H, æquales sunt duobus rectis; Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea,

& alter-

& alternatim angulos &c. Quod erat demonstrandum.

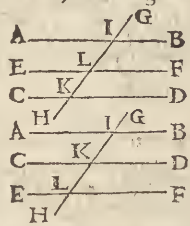
SCHOLION.

CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR. 21. PROPOS. 30. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectę A B, C D, eidem rectæ E F, parallelę; Dico & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam omnes hæ lineę in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducatur recta G H, secans A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F, erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. 29.primi. Rursus quia C D, ponitur etiam parallela ipsi E F, erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. 29.prim. Quare anguli A I L, D K I, æquales inter se quoq; erunt. 1.pron. Cum igitur sint alterni, erunt rectæ A B, C D, parallelę inter se. 27.primi. Quæ igitur eidem rectę lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



SCHOLION.

QVOD si quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas esse rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendũ est, duas A I, B I, non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Cõstat aũt A I, productã coincidere cum B I. Quamobrem, quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, &

inter se sunt parallelæ; Vel certe vnam, & eandem lineam constituunt, quando inter se coeunt. Quod ita demonstrabitur. Sint duæ rectæ A B, A C, *coeuntes in* A, *parallelæ ipsi* D E. *Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim* A, *ducatur recta* A F, *secans* D E, *in* F, *vtcunq;. Quoniam igitur* A B, D E, *sunt parallelæ, erũt anguli alterni* B A F,

29.primi. *A F E, æquales; Addito ergo communi angulo C A F, erunt duo*

2. pron. *anguli ad A, æquales duobus angulis C A F, A F E. Sed hi duo*

29.primi. *æquales sunt duobus rectis cũ sint interni inter duas parallelas; Igitũ & duo anguli ad* A, *duobus erũt rectis æquales; ac propterea in rectũ erũt cõstitutæ ipsæ A B, A C. Qđ est propositũ.*

14.primi.

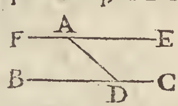
31.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunq; faciens angulum

23.primi. quemcunq; A D B; Cui ad A, æqualis constituatur E A D. Dico igitur rectã E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi B C. Cum enim anguli alterni A D B, D A E, æquales sint, per constructionẽ; Erunt



27.primi. rectæ B C, E F, parallelæ. A dato, igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

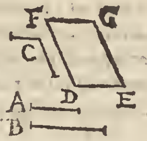
DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non poßet, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quã vna, duci nequeunt. Si.n. duæ ducerent, cõuenirẽt

ipsæ

ipsæ in puncto eodem, quod est absurdum, cum sint parallelæ.

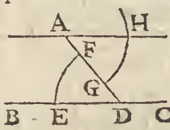
Ex hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq́; angulũ illũ cõprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

Sint enim datæ rectæ A, B, oporteatq́; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq́; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ rectæ A, sit æqualis, fiat angulus E D F, angulo C, & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E, agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E, parallela secans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela sunt, ex constructione; parallelogrammũ erit D E G F. Quod cũ ex cõstructione, habeat angulũ D, angulo dato C, æqualẽ, & latera D E, D F, circa dictũ angulũ D, datis rectis A, B, æqualia; factũ erit, qđ proponitur.

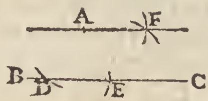


PRAXIS.

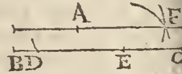
Sit ducenda parallela ipsi B C per punctum A. Ducatur recta A D, vtcunq; ad B C & ex D. & A ad idẽ interuallũ quodlibet describãtur duo arcus ad diuersas partes; vnus ad partes B alter ad partes C: Deinde officio circini arcui E F, abscindatur ex arcu altero arcus G H, æqualis. Si igitũ ex A, p H, recta ducatũ, erit hæc parallela ipsi B C. Nã anguli E D F, H A G sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c. 27. primi.



Alio modo ducẽ per idẽ punctũ A, datũ lineæ parallela lineæ datæ B C hac arte. Ex cẽtro A, ad quoduis interuallũ describatũ arcus secãs B C in pũcto D; & eodẽ interuallo ex D sumatur punctũ E, in eadẽ recta B C: Deinde eodẽ interuallo ex A, & E, describantũ duo arcus duo arcus secãtes se se in F. Nã ducta recta A F, erit parallela rectæ B C. Quoniã propter idẽ interuallum aßumptũ recta A F æqualis est rectæ D E; & recta A D, rectæ E F, si ducerentur hæ lineæ; erit A F, oppositæ D E, parallela,



vt postea demonstrabimus propos. 34. Quod si punctum A, vicinum fuerit rectæ B C, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in B C, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ B C, nempe E, quod tamen aliquantulum distet

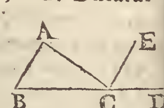


a puncto D. (*Quo enim maior fuerit distantia inter* D, *&* E, *eo rectius parallela ducetur*) *Eodem interuallo arcus describatur ad partes A* : *Deinde ex A, interuallo* D E *alter arcus descriptus secet priorem arcum in* F. *Recta igitur ducta A F, erit parallela rectæ B C, vt prius ; quia recta A F, æqualis est rectæ* D E, *ob idem interuallum ; & recta A* D, *rectæ E F, si hæ rectæ ductæ essent, &c.*

32. ## THEOR. 22. PROPOS. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto : Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C, ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. Ducatur e-
31.primi. nim ex C, linea C E, parallela rectę A B.



Quoniam igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E, erunt anguli alter-
29.primi. ni A, & A C E, æquales. Rursus, quia recta B D, in easdem parallelas incidit,
29.primi. erit angulus externus D C E, æqualis interno B; Additis
2. pron. igitur æqualibus A C E, & A, fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B æqualis. Quod est propositum.

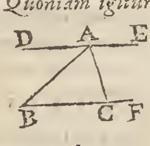
DICO secundo, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & A C B, duobus esse rectis æquales. Cũ enim exter-

externus angulus A C D, ut ostensum fuit, æqualis sit duo bus internis A, & B; si addatur communis A C B; erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: 2. pron.
Sed duo A C D, A C B, ęquales sunt duobus rectis; Igitur 13. primi.
& tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

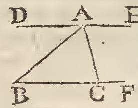
Cum demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse utrolibet interno, & opposito; Hic autem, eundem externum eisdem internis esse æqualem; perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum supe rari ab externo, reliquo interno angulo. Vt in triangulo pro posito angulus A, superatur ab angulo A C D, angulo B; Et angulus B, superatur ab eodem angulo A C D, angulo A, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli, quomodocunq; sumptos, duobus esse rectis minores; Hic vero omnes tres duobus rectis æqua les esse; manifestum est, duos a duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt, angulo A C B, &c.

Omne porro triangulum habere tres angulos duobus re ctis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per pun-
ctum A, ducatur rectæ B C parallela D E. Quoniam igitur 31. primi.
anguli alterni D A B, & A B C, æquales 29. primi.
sunt; si addantur æquales E A C & A C B,
(sunt enim & hi alterni) erunt duo anguli 2. pron.
D A B, E A C, duobus A B C, A C B æqua les. Addito ergo communi angulo B A C,



erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angu lis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales. quod est propositum. Ex hoc autem facile con cludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protra-

ctũ, æqualẽ esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam anguli A B C, B A C, A C B, æquales sunt duobus re-
13. primi. *ctis, vt ostensum fuit; Sunt autem, & anguli A C F, A C B,*



duobus rectis æquales; Erunt anguli ABC, B A C A C B, angulis A C F, A C B, æquales. Dempto igitur communi angulo A C B,
3. pron. *remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, æqualis.*

F A C I L E *etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur C F, recta sitq; angulus A C F, æqualis duobus angulis A B C, B A C: Dico, rectas B C, C F, in directum iacere. Cũ.n. angulus A C F, æqualis sit angulis A B C, B A C; si addatur communis angulus A C B, erunt anguli*
2. pron. *A C F A C B, æquales angulis A B C, B A C, A C B: Sed A B C,*
32. primi. *B A C, A C B, æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli A C F, A C B; duobus erunt rectis æquales. Quare B C, C F,*
14. primi. *vnam lineam rectam constituunt.*

QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

D V O B V S *modis ex hac propos. 32. colligemus, quot nam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.*

O M N E S anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

H O C *est, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, idest, duobus rectis; Anguli vero secundæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autẽ tertiæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis tri-*

bis tribus rectis, sex videlicet rectis; Et sic de reliquis. Eum autem locum quælibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ superficiem non concludunt, unde neq; figuram constituunt, sed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ constitutionem requiruntur; Atq; ita triangulum, quia habet tria latera, totidemq; angulos, erit prima inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus relinquitur vnum; Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus a 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaq; figura contenta 20. lateribus, cum sit decima octaua, habebit 20. angulos æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictũ est. Ita quoq; omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam a quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineæ rectæ, & solum ad duos propinquos angulos non possunt duci: Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrãgulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulum in quatuor, &c.

Cum igitur anguli horũ triangulorũ constituãt oẽs angulos rectilineæ figuræ propositæ, & oẽs anguli cuiuslibet triãguli æquales sint duobus rectis; perspicuũ est omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, in quot triãgula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras; Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris.

32. primi.

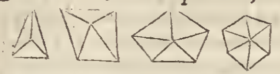
Secundus modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, dem-

ptis

ptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

Hoc est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis: Ita etiã anguli figuræ continentis 20. latera æquiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.

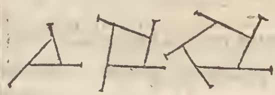


Demonstratio autẽ huius rei talis est. Si ab aliquo puncto intra figurã assumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosùe, figura ipsa continet: Cum igitur anguli cuiuscunq; trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt: At anguli circa punctum intra figuram aßumptum non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum assumptum, quot latera, vel angulos continet figura: Sunt autem illi anguli circa dictũ punctũ æquales 4. rectis, vt collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cuiusq; figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor quot ipsa figura continet angulos, seu latera. quod est propositum.

32. primi.

Ex hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producantur versus eandem partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur cũ duob⁹ rectis, atq; adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosùe figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonstrauimus: Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni, & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt.

13. primi.



Exemplum In triangulo quouis, anguli interni & externi simul æquales sunt sex rectis; Cum igitur interni duobus sint *bus sint rectis æquales, erunt soli externi æquales quatuor rectis. In quadrilatero, anguli externi, & interni simul æquales sunt octo rectis: Cum igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, erunt & soli externi quatuor rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni, & externi sunt æquales 10. rectis; quoniam vero interni adæquantur sex rectis, remanebunt externi æquales quatuor rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur; Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.*

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quælibet duo extra coeant; efficientur quinq; anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis.

IN pentagono A B C D E, latera in vtrãq; partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinq; angulos F, G, H, I, K. æquales esse duobus rectis. In triangulo enim B H K, cum latus H B, sit protractum ad F, erit externus angulus F B K, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis: *32. primi.* Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli F B A, F A B, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales qu[illegible]q; angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales sunt duobus rectis. *2. pron.* Igitur & quinq; anguli F, G, H, I, K, duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum. *32. primi.*

COROLLARIVM. I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusq; alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaq; erunt ipsa triangula. *3. pron.*

COR-

COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum; Nam reliqui duo simul conficient vnum rectum. Quod si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem; Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto. Si deniq; dictus angulus exti terit acutus, vtrumq; reliquorum maiorem esse semirecto; Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto.

COROLLARIVM. III.

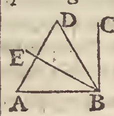
PERSPICVVM quoq; est, quemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti; Vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

COROLLARIVM. IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum, propter perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum deniq; tertiam partem vnius recti.

SCHOLION.

PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. *Super rectam* A B,



1.primi. *constituatur triangulum æquilaterum* A B D: *Et quia per corollarium 3. angulus* A B D, *facit duas tertias partes anguli recti* A B C; *erit angulus* C B D, *pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo* A B D, *bifariam, per rectam* B E, *erit vterque angulus* A B E, E B D, *tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus* A B C, *diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.* 9.primi.

THEO-

THEOR. 23. PROPOS. 33. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungũt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales; Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia sint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq;, & anguli quoq; dictis lateribus inclusi ęquales; erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

29. primi.
4 primi.
27. primi.

SCHOLION.

DIXIT *Euclides, lineas æquales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, vt coniungentes sint & æquales & parallelæ. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, &* D; *Item ad B & C, neque coniungentes essent parallelæ vnquam, sed perpetuò se mutuò secarent; neq; essent æquales, nisi raro admodum, vt ex sequenti propositione constabit.*

THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex

aduerso

aduerso & latera, & anguli; atq; illa bifariã secat diamteer.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita A B, D C, inter se esse æqualia, nec non latera opposita A D, B C: Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non angulos oppositos D A B, & D C B: Deniq; ducta diametro A C, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim A B, D C, sint parallelę, erunt anguli alterni B A C, D C A, ęquales. Rurs⁹ q̃a A D, B C, sunt parallelę, erũt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaq; cum duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterq; vtriq; & latus A C, dictis angulis adiacens commune vtriq; triangulo; erit recta A B, æqualis oppositæ rectę D C, & recta B C, oppositæ rectę A D. quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, ęqualis. Et quia si ęqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli B C A, D A C, toti quoq; anguli B A D, B C D, fiunt ęquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera A B, B C, trianguli A B C æqualia sunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq; & angulus B, angulo D, ęqualis, vt iam ostendimus; erunt triangula A B C, C D A, ęqualia, ideoq; parallelogrammũ A B C D, diuisum bifariam a diametro A C, quod tertio proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum ęqualia sunt inter se, quę ex aduerso &c. Quod ostendendum erat.

29. primi.
29. primi.
26. primi.
2. pron.
4. primi.

SCHOLION.

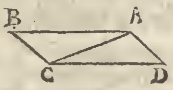
APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogrammum a diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat, anguli etiam bifariam diuiduntur a diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erũt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum,

Altera

Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, latera opposita A B, D C, æqualia; Item opposita latera A D, B C. Dico A B C D, esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemq; lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C *trianguli* A B C, *æqualia duobus lateribus* C D, D A. *trianguli* C D A, *utrumque utrique, & basis* A C, *communis; igitur erit angulus* B, *angulo D, æqualis. Rursus quia latera* A B, B C, *æqualia sunt lateribus* C D, D A, *vtrumque vtrique, & anguli* B, D, *ostensi æquales; erit angulus* B A C, *angulo* D C A, *alterno æqualis, & angulus* B C A *alterno angulo* D A C. *Quare erunt* A B *&* D C, *parallelæ; Item* A D, *&* B C, *quod est propositum.*



8. primi

4. primi

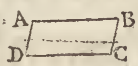
27. primi

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidē esse parallelogramma; quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, ut manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34 ut patet.

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

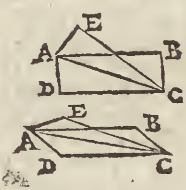
SINT in quadrilatero A B C D, *anguli oppositi* A, *&* C, *æquales; Item oppositi anguli* B, *&* D. *Dico* A B C D, *esse parallelogrammum; hoc est, lineas* AB DC *esse parallelas; Itemq; lineas* A D, B C. *Nam si æqualibus angulis* A, *&* C, *addantur æquales anguli* B, *&* D; *erunt duo anguli A, & B, duobus angulis* D, *&* C. *æquales, & idcirco anguli* A, *&* B, *dimidium facient quatuor angulorum* A, B, C, *&* D. *Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, ut ad propos. 32. demonstrauimus,*



2. pron.

strauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare
28. primi *A D, B C, parallelæ sunt. Eadē ratione erunt A B, D C, parallelæ. Erunt. n. duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, et C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiā manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrāmum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus.*

H O C *theorema conuertit secundam partem propositionis 34. ut constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest a diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, uel Rhomboides A B C D, quod parallelogrammum esse ostensum est; in quo ducta diametro A C, constituatur super A C, triangulo A B C, æquale triangulū A E C, inuerso ordine, ita ut latus C E, sit æquale lateri A B; & A E, ipsi C B, fiatq; trapezium A E C D. Quoniā vero triāgulū A B C, triāgulo A D C, æquale est,*



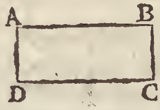
34. primi *quod diameter A C, bifariā secet parallelogrāmū D B: Erit et triangulū A E C, triangulo A D C, æquale: Ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuidetur a diametro A C.*

Q V O D *si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab utraque diametro, illud parallelogrammum erit, ut ostendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.*

Tertium Theorema huiusmodi est.

O M N E quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

S I N T *in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti; Dico ipsum esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemque A D, B C. Quoniam duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cum*

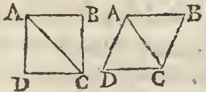


28. primi *sint duo recti; erunt A D, B C, parallelæ: Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo A B C D, parallelogrammum. quod est propositum.*

H I N C *rursum constat, Quadratū, & Altera parte longius*

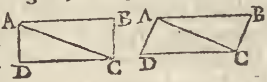
gius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, ut liquet ex eorum definitionibus.

His in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma, facile ostendemus angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro; Angulos uero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, ut paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, uel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniã igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, utrumque utrique, & basis B C, basi D C; (sunt enim hæ figuræ æquilateræ) erũt anguli B A C, D A C, æquales; Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro. 8. primi

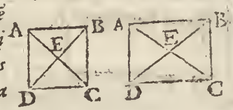


Sit rursus, Altera parte longius, uel Rhomboides; A B C D, in quo diameter A C, sitq; maius latus A B. Quoniam igitur in triangulo A B C, latus A B, maius est latere B C, erit angulus B C A, maior angulo B A C: Est autem angulus B C A, æqualis angulo D A C, alterno; quod B C, A D paralleIæ sint. (Est enim ABCD, ostensum esse parallelogrammũ.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur a diametro A C. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos.

18. primi
29. primi



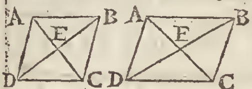
Eodem fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte lõgiore æquales esse; At uero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorẽ quidem eam quæ angulos acutos, minorem uero eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit.n. quadratũ, uel altera parte lõgius A B C D, in quo diametri AC, BD, quas dico esse æquales. Cũ n. duo latera A B, B C, triãguli ABC, æqualia sint duobus laterib⁹ AB, AD triãguli



 BAD,

B A D, utrumque utrique, & angulus A B C, angulo B A D,
4. primi *quia uterqe rectus; Erit basis A C, basi B D, æqualis: Ac*
proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore
æquales sunt.

Sit *rursus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo*
diametri A C, B D; sitq; angulus B A D, maior; A B C, mi



nor. Non enim æquales sunt, quia
alias uterque esset rectus, cum
29. primi *ambo æquales sint duobus rectis;*
quod est absurdum, & contra de
finitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum B D,
maiorem esse diametro A C. Quoniam duo latera A B, A D,
trianguli B A D, æqualia sunt duobus lateribus A B, B C,
trianguli A B C, vtrumque vtrique, & angulus B A D, an-
24. primi *gulo A B C, maior existit; erit basis B D, maior base A C.*
quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositio-
ne 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas quæ coniungunt
parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, ut ibidem
annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ A C,
B D, inæquales sunt, licet coniungant parallelas A B, D C,
quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, ut perspi
cuum est.

In *omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifa-*
riam diuidunt. Cum enim duo anguli E A D, E D A, trian-
29. primi *guli A E D, æquales sint alternis angulis E C B, E B C, trian-*
34. primi *guli B E C, uterque vtrique; & latus A D æquale lateri B C,*
26. primi *opposito; Erit, & A E recta rectæ C E, & recta D E, rectæ*
B F, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur
in puncto E.

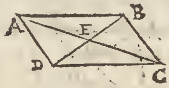
Hvivs *autem, quod modo diximus, conuersum etiam*
demonstrabimus, nimirum.

Omne quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariã diuidunt, parallelogrammũ est.

In *quadrilatero enim A B C D, diametri A C B D, se*
mutuo bifariam diuidant in E. Dico A B C D, parallelogrã-
mum esse. Cum enim latera A E, E B trianguli A E B, æqua-
lia sint lateribus C E, E D, trianguli C E D; & anguli con

tenti

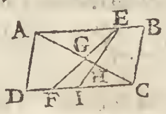
tenti ad uerticem E, *æquales quoque: Erunt & bases* A B C D *æquales, & angulus* A B E, *angulo alterno* CDE, *æqualis. Quare rectæ* A B, C D, *parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur* A D, C B. *Parallelogrāmum ergo est* ABCD. 15 primi 4. primi 27. primi



Huc quoque referri potest hoc theorema.

Recta linea secans diametrum parallelogrammmi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariá quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

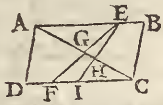
In *parallelogrammo* A B C D, *diametrum* A C, *bifariā secet recta* E F, *in puncto* G; *Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam angulus* E A G, *æqualis est angulo al-* 29. primi
terno F C G, *& angulus* E G A, *angulo* F G C, *Est autem &* 15. primi
latus A G, *lateri* C G, *æquale per hypothesin; Erunt & latera* E G, F G, *æqualia. Quare cum latera* A G, G E, *æqualia sint lateribus* CG, G F, *& anguli quoque contenti æquales;* 26. primi
erunt triangula A G E, C G F, *æqualia.* 4. primi
Addita igitur communi quantitate B C G E, *erit triangulum* A B C, *trapezio* B C F E, *æquale; Sed* 2. pron.
triangulum A B C, *dimidium est parallelogrammi* A B C D, 34. primi
Igitur & trapezium B C F E, *dimidium erit eiusdem parallegrammi, ideoque recta* E F *parallelogramum bifariā secat.*



Secet *iam* E F, *parallelogrammum bifariam; Dico, & diametrum* A C, *bifariam secari in* G. *Si enim non bifariam diuiditur in* G, *diuidatur bifariam in alio puncto, vt in* 10. primi
H, *per quod ducatur recta* E H I; *Eritque, vt iam demonstrauimus,* E I C B, *trapezium dimidium parallelogrammi* A B C D, *atque adeo æquale trapezio* E F C B *quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur* A C, *bifariam in* G, *& non in alio puncto. quod erat propositum.*

Hinc *facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrāmi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrā-*

mũ, vel extra, quod tamẽ non ſit in diametro, niſi ipſum ſecet dia

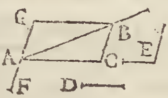


metrũ bifariã; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, q̃ parallelogrãmũ bifariã ſecet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt ſi punctum ſit E, in latere A B, ducenda eſt recta E F, per G. punctum, in quo diameter A C, bifariam diuiditur; & ſic de alijs punctis.

D EMONSTRAT *quoque hic Peletarius problema non iniucundum. videlicet.*

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarũ faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem eſſe duobus rectis.

D VAE rectæ infinitæ A B, A C, contineant angulũ B A C, *ſitq́; data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, ut duo anguli E, & B A C, minores ſint duobus rectis:*



Oportet igitur inter rectas A B, A C, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cũ alterutra uero illarum, nimirũ cum A C, *facientem angulum æqualem angulo dato*
23.primi. *E. Fiat angulus C A F, æqualis angulo E,*
3. primi *& producta F A, ad G, ſit A G, æqualis rectæ D; & per G,*
31. primi *ducatur G B, parallela ipſi* A C, *ſecans* A B, *in B: Deinde per B, ducatur* B C, *parallela ipſi* A G, *ſecans* A C, *in C. Dico rectam* B C, *collocatam inter rectas* A B, A C, *æqualem eſſe rectæ D, angulumq́; B C A, angulo E. Cum enim parallelogrammum ſit, per conſtructionem,* A C B G, *erit recta* BC,
34.primi. *rectæ* G A, *æqualis; At* G A, *æqualis eſt, per conſtructionẽ,*
32. primi *rectæ D; Igitur & B C, rectæ D, æqualis erit. Rurſus quia*
29.primi. *angulus* B C A, *angulo alterno* C A F, *æqualis eſt; & eidem angulo* C A F, *æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E; erunt anguli E, &* B C A, *æquales. Quod eſt propoſitum.*

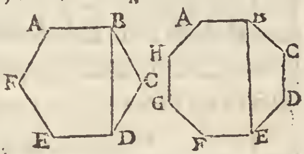
Cæterum

Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulũ A B C, si anguli B A C, *&* B C A, *æquales essent duobus rectis, vel maiores, ut constat ex propos.* 17. *uel* 32.

EX PROCLO.

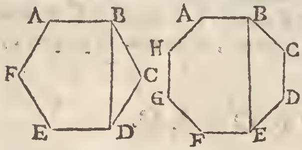
IN omni figura rectilinea latera habens numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æquiangula; erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quę ex utraque parte latera habent ęqualia numero; ut in hexagono A B C D E F, latera opposita erunnt A B, E D; quoniam tam ad partes A, & E, duo sunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono uero A B C D E F G H, latera opposita erũt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quam ad partes B, & E. Et sic in aliis figuris ęquilateris parium laterum, ex utraque parte oppositorum laterum, erunt tot latera, quot sunt in dimidio



numero laterum, minus uno. Vt in quadrangulo erit unum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur duo quęlibet latera opposita esse parallela; A B, nimirum ipsi E D, in hexagono; & A B, ipsi F E, in octogono, & sic de cęteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, ut in 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni ęquales sunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiusdem hexagoni ęquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur ęquales: Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, duobus rectis ęquales; 32. primi
Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis æquales erunt; Quare parallelæ erunt A B, & E D. 28. primi
Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis ęquales. sunt autē quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis; Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erũt rectis æquales, atq; adeo AB, FE, parallelæ erũt. Eodē modo demõstrabitur, in omnibus aliis 28. primi

figuris huiusmodi angulos duos ad lineã rectã extrema oppositorũ laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam



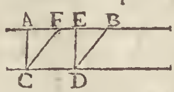
in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis; At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis: Ablatis igitur sex, relinquitur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum, eadem linea abscindet hexagonũ, cuius anguli sunt octo rectis æquales; At sex anguli totius figuræ æquales sunt decẽ rectis; demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, ut ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea que in definitionibus, Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

35. THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

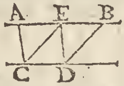
INTER duas parallelas A B, C D, super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F; (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad areã, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E Quoniam



igitur in parallelogrammo C D E A, recta A E æqualis est rectæ C D oppositæ; & eidem C D æqualis est F B, in parallelogrammo C D B F; Erunt A E, F B, inter se æquales: Dempta igitur communi F E, remanebit A F, ipsi E B, æqualis: Est autem & A C, ipsi E D, æqualis in parallelogrammo C D E A, & angulus B E D, angulo F A C, externus interno. Quare triangulũ F A C, triangulo B E D, æquale erit: Addito igitur communi trapezio

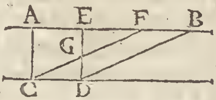
34. primi *1. pron.* *3. pron.* *34. primi* *29. primi.* *4. primi* pezio C D E F, fiet totum parallelogrãmum C D E A, toti parallelogrammo C D B F æquale. Quod eſt propoſitum. 2. pron.

Cadat ſecundo punctum F, in punctum E; Dico rurſus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia eſſe. Erunt enim ut prius, rectæ A E, E B, æquales, atque adeo triangula E A C, B E D, æqualia. Addito igitur cõmuni trian- 4 primi



gulo C D E, fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia. 2. pron.

Cadat tertio punctum F vltra E, ita vt recta C F, ſecet rectam D E, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectæ A E, F B, ſunt æquales; ſi communis addatur E F, erit tota A F, toti E B, æqualis, atque adeo triangulũ F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo cõmuni triãgulo E G F, 2. pron. 4. primi



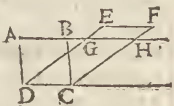
remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B æquale. 3. pron.
Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum. 2. pron.

SCHOLION.

Convertemus *facile hanc propoſitionem, hoc modo.*

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemque partes cõſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.

Sint *duo parallelogramma æqualia* A B C D, C D E F, *ſuper eandem baſin* C D, *& ad eaſdem partes. Dico rectam* A B *productam, in directũ iacere ipſi* E F, *& propterea ipſa parallelogramma inter eaſdem eſſe parallelas. Alias enim* A B, *producta uel cadet infra* E F, *uel ſupra;*



Cadat primo infra, qualis eſt A H. *Erit igitur parallelogrammum* C D G H, *æquale parallelogrammo* A B C D: *Ponitur autem* 35. primi

autem eidem parallelogrammo A B C D, *æquale parallelogrã-*
1. *pron.* *mum* C D E F; *Quare parallelogrãma* C D E F, CDGH, *æqualia erunt, totum,* & *pars, quod est absurdum. Non ergo cadet* A B, *infra* E F.

CADAT *secundo* A B, *producta supra* E F. *Cadet igitur* F E, *protracta infra* A B: *Quare, ut prius erunt parallelogramma* A B C D, CDHG *æqualia, totum et pars, quod est absurdum. Idem absurdũ consequeretur, si* C F, D E, *producerentur usq; ad* A B, *protractam. Eademq; demonstratio conueniet omnibus casibus, qui occurrere possunt. hoc est, siue punctum* E, *sit ultra* B, *siue non, ut perspicuum est. Non ergo cadet* A B, *supra* E F; *sed nec infra, ut demonstratum est: ergo producta, in directum iacet ipsi* E F. *ac proinde parallelogramma* A B C D, C D E F, *in eisdem sunt parallelis.*

36. THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma A C E F, G H D B, super æquales bases C E, H D, inter easdem parallelas A B, C D, Dico ea esse æqualia. Connectantur enim extrema rectarũ C E. G B, ad easdem partes lineis rectis C G, E B. Quoniam igitur recta C E, æqualis ponitur rectæ H D, & eidem H D, æqualis est G B. Erunt C E, G B, æquales inter se; sunt autem & parallelæ, per hypothesin: Quare & C G, E B, ipsas coniungentes parallelæ erunt, & æquales, ideoq; C E B G, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma A C E F, G C E B, sint inter easdẽ parallelas, & super eandem basin C E, erit parallelogrammũ A C E F, parallelogrammo G C E B, æquale. Rursus quia parallelogramma G C E B, G H D B, sunt inter easdẽ parallelas, & super eandem basin G B, erit quoq; parallelogrãmum G H D B,

34. primi
1 pron.
33. primi.
35. primi.

GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare 35.primi.
& parallelogramma ACEF, GHDB, inter se æqualia erũt. 1. pron.
Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, &c. Quod ostendendum erat.

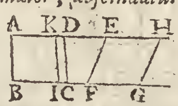
SCHOLION.

Conversum huius theorematis duplex est, ad hũc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia sup bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.

Sint primo duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, *super bases æquales* BC, FG, *& ad easdem partes constituta; Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est,* AD, *protractam coire in directum cum* EH. *Nam alias cadet aut infra* EH, *aut supra. Quo posito sequitur, totum et partem esse æqualia, quẽadmodum in conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facile commonstrat. Intelligendæ sunt autem bases æquales datæ in eadem linea recta* BG.

Sint secundo eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas AH, BG. *Dico bases* BC, FG, *esse æquales. Si enim altera, nempe* BC, *dicatur maior, abscindatur* BI, *æqualis rectæ* FG, *& ducatur* IK, 3. primi
parallela ipsi CD: *Eritq́; parallelogrã-* 31.primi.
mum ABIK, *æquale parallelogrammo* 36.primi
EFGH; *& ideo parallelogrammo* ABCD, *pars toti. quod est absurdum. Non ergo* BC, *maior est, quam* FG. *Eadem ratione neque minor erit. Quare bases* BC, FG, *æquales sunt.*



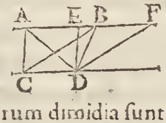
THEOR. 27. PROPOS. 37. 37.

TRIANGULA super eadẽ basi cõsti-

tuta,

tuta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

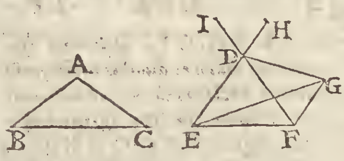
INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D. (Dicitur autẽ triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars unius, & angulus oppositus alteram tangit.) Dico ea esse æqualia. Per D, enim ducatur D E, parallela rectæ
31. primi.



A C, & D F parallela rectæ B C. Erunt igitur parallelogrãma A C D E, A C D F æqualia; Sunt enim super eandem basim C D, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula A C D B C D; quod A D. B D diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.
35. primi
34. primi
7. pron.

SCHOLION.

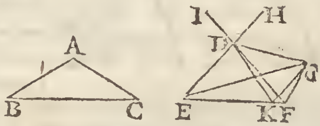
CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula quorũ duo latera unius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia; Id, quod in propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula A B C, D E F, *& latera* A B, A C *æqualia lateribus* D E, D F, *& angulus* A, *maior angulo* E D F, *sintque primo hi duo anguli duobus rectis æquales: Dico triangula esse*



æqualia. Producatur enim E D, *ad* H, *&* F D, *ad* I. *fiatq;*
23. primi *angulus* E D G, *æqualis angulo* A, *& recta* D G, *rectæ* D F, *seu* A C; *ducanturque rectæ* E G, G F. *Quoniam igitur duo anguli* A, *&* E D F, *ponuntur æquales duobus rectis, & angulus* E D G, *æqualis est angulo* A; *erunt & anguli* E D G, E D F, *duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli*

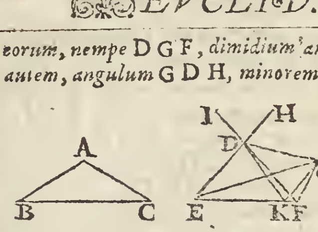
guli E D G G D H, *duobus rectis æquales; Igitur anguli* E D G, E D F, *angulis* E D G, G D H, *æquales erunt: Quare ablato communi angulo* E D G, *remanebit angulo* E D F, *æqualis angulus* G D H: *Est autem eidem angulo* E D F, *æqualis angulus* H D I; *Igitur & anguli* G D H, H D I, *æquales erunt, atque adeo angulus* G D H, *dimidium erit totius anguli* G D I. *Rursus quia latera* D F D G, *sunt æqualia in triangulo* D F G; *erunt anguli* D F G, D G F, *æquales; qui cum æquales sint externo angulo* G D I, *erit uterlibet eorum, nempe* D G F, *dimidium anguli* G D I: *Ostensum est autem, angulum* G D H, *dimidium quoque esse eiusdem anguli* G D I: *Quare anguli* G D H, D G F, *æquales erunt. Et quia sunt alterni inter* E H, F G; *erunt* E H, F G, *parallelæ. Quamobrem triangula* D E G, D E F, *æqualia erunt, cum habeant eandem basin* D E, *sintque inter easdem parallelas* D E, F G. *Quoniam uero triangulum* D E G, *æquale est triangulo* A B C, *propterea quod latera* D E, D G, *æqualia sunt lateribus* A B, A C, *& angulo* A, *angulus* E D G; *erit & triangulum* A B C, *triangulo* D E F, *æquale, quod est propositum.* 13. primi 3. pron. 15. primi 5. primi 32. primi 27. primi 37. primi 4. primi

Sɪɴᴛ *secundo anguli* A, *&* E D F, *duobus rectis maiores; Dico triangulum* A B C, *quod maiorem habet angulũ, minus esse triãgulo* DEF.



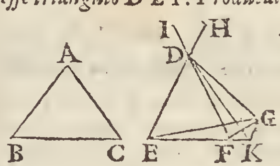
Producatur enim E D, *ad* H, *&* F D, *ad* I, *fiatq́; angulus* E D G, *æqualis angulo* A, *& recta* D G, *rectæ* D F, *seu* A C, *æqualis, ducanturque rectæ* E G, G F. *Quoniam igitur anguli* A, *&* E D F, *ponuntur maiores duobus rectis, erũt & anguli* E D G, E D F, *duobus rectis maiores; Sunt autẽ anguli* E D G, G D H, *æquales duobus rectis; Igitur anguli* E D G, E D F, *maiores sunt angulis* E D G, G D H; *Quare ablato communi* E D G, *remanebit angulus* E D F, *maior angulo* G D H. *Quoniam uero angulus* E D F, *angulo* H D I, *æqualis est, erit quoque* H D I, *maior quã* G D H; *atque adeo* G D H *minor quam dimidium anguli* G D I. *Rursus quia latera* D G, DF, *æqualia sunt, erunt anguli* D F G, DGF, *æquales; qui cum sint æquales externo* G D I, *erit uteruis eorum,* 23 primi 3. primi 13. primi 15. primi 5 primi 32. primi

eorum, nempe D G F, *dimidium anguli* G D I: *Ostensum est*
autem, angulum G D H, *minorem esse dimidio eiusdẽ* G D I;



Quare D GF, *maior erit,*
quam GDH. *Abscinda-*
tur ex angulo D G F, *an-*
23.primi. *gulus* DGK, *æqualis an-*
gulo alterno GDH: *Erit*
27.primi. *ergo* G K, *parallela ipsi*
D E, *secabitq;* G K, *rectã* EF. *Ducatur ex* D, *ad* K, *ubi* GK,
secat rectam E F, *recta* D K. *Erit igitur triangulum* D E G,
37.primi *æquale triangulo* D E K. *Quoniam autem triangulum* DEG,
4.primi *æquale est triangulo* A B C, *propterea quod latera* D E, D G
æqualia sunt lateribus AB, AC, *& angulo* A, *angulus* EDG;
erit & triangulum A B C, *triangulo* D E K, *æquale. Cum*
9. pron. *igitur* D E K, *minus sit triangulo* D E F, *erit quoque* ABC,
triangulum triangulo DEF, *minus: Quod est propositum.*

SINT *tertio anguli* A, *&* E D F, *duobus rectis minores:*
Dico triangulum A B C, *quod maiorem habet angulum, maius*
esse triangulo D E F. *Producatur* E D, *ad* H *&* F D, *ad* I,



23.primi *fiatq; angulus* EDG, *æqualis*
angulo A, *& recta* DG, *recta*
D F, *seu* A C; *ducanturq; re-*
ctæ E G, G F. *Quoniam igitur*
anguli A, *&* E D F, *ponuntur*
minores duobus rectis, erunt
quoque anguli EDG, EDF,
13.primi *duobus rectis minores. Sunt autem anguli* EDG, GDH, *duo-*
bus rectis æquales; Igitur EDG, EDF *minores sunt, quam*
EDG, GDH; *demptoq; communi* EDG, *remanebit* EDF,
15.primi *minor, quam* GDH; *Est uero* EDF, *æqualis ipsi* HDI. *Quare*
& HDI, *minor erit quam* GDH, *atque adeo* GDH, *maior*
est dimidio anguli GDI. *Quoniam autem* DGF, *dimidium*
est eiusdẽ anguli GDI, *ut iam supra ostensum fuit; erit* GDH,
maior, quam DGF: *Fiat igitur angulus* D G K, *æqualis an-*
gulo G D H, *ducta recta* G K, *q̃ secabit rectam* E F, *protractã*
27.primi *in* K, *& ducatur recta* D K: *Eritque, ut prius,* G K, *paral-*
37.primi *lela ipsi* DE, *triangulumq;* DEG, *triangulo* DEK, *æquale:*
4.primi *Est autem iterum* D E G, *æquale ipsi* A B C. *Igitur &*
9. pron. A B C, *æquale est ipsi* D E K; *Quocirca cum* D E K, *ma-*
ius

ius sit quam D E F; *erit &* A B C, *maius, quam* D E F; *Quod demonstrandum erat.*

Ex his perspicuum est, cur Euclides *in propos.* 24. *solum collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, ut ibidem admonuimus.*

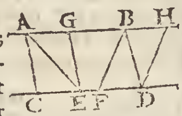
THEOR. 28. PROPOS. 38.

38.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas A B, C D, & super æquales bases C E, F D, sint constituta triangula A C E, B F D. Dico ipsa esse æqualia. Ducatur.n. E G, parallela ipsi A C, & D H, ipsi B F; Eruntq; parallelogramma A C E G, B F D H, æqualia. Cum igitur horum dimidia sint triangula A C E, B F D; erunt hæc inter intr se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

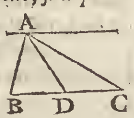
31. primi
36. primi
34. primi
7. pron.



SCHOLION.

CONVERSA *huius ostendetur ab* Euclide *propos.* 40.

COLLIGITVR *autem ex hac propositione, si a quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo* A B C, *ex angulo* A, *recta* A D, *diuidens bifariam latus* B C, *in* D; *Dico triangulum* A B C, *bifariam quoque secari. Si enim per* A, *ducatur parallela ipsi* B C, *erunt duo triangula* A B D, A D C, *inter easdem parallelas, et super æquales bases; Quare æqualia erunt.* 38. primi.

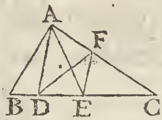


EX

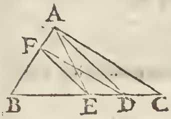
EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in uno latere trianguli propoſiti lineam rectam ducere, quę bifariam ſecet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod ſi punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, ut eſt oſtenſum: Si uero D, non diuidat



10. primi B C, bifariam, ſecetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppoſitum A, duca-
31. primi tur recta D A, & per per E, parallela E F, ipſi D A, ſecans A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuiſum bifariam a linea D F. Nam ducta re-
37. primi cta E A, erunt triangula E F A, E F D, æqualia, cum ſint ſuper eandem baſin E F, & inter eaſdem parallelas E F, A D. Addito igi-
2. pron. tur communi C F E, erunt tota triangula A E C, C D F, æqualia: Eſt autem A E C, dimidium totius A B C, ut iam fuit oſtenſum; Igitur & C D F, dimidium eſt eiuſdem trianguli A B C. quod erat probandum.



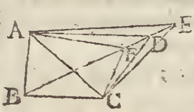
QVOD ſi punctum D, fuerit in altera medietate E C, eodem modo problema conficiemus: ſed tunc triangulum abſcindetur ad partes B, trapezium uero ad partes C, ut figura præſens ſatis indicat. Demonſtratio autem eadem eſt, ſi in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo nos uniuerſalius proponemus ad finem ſexti libri.

39.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta; & in eiſdem ſunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia A B C, D B C, ſuper eandem baſin B C, & ad eaſdē partes; Dico ipſa eſſe inter eaſdem parallelas conſtituta hoc eſt, rectam ductam A D, parallelam eſſe ipſi B C. Si enim non



31. primi eſt, ducatur ex A, parallela ipſi B C, quæ

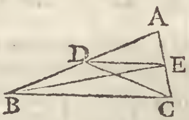
quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primo supra, qualis est A E, coeatq; cum B D, protracta, in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, B C, erit triangulo A B C, triangulum E B C, æquale: Est autem per hypothesin triãgulum quoq; D B C, æquale eidem triangulo A B C; Igitur erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erũt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat. 37. primi. 1. pron.

SCHOLION.

Ex his infert Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D F, latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cũ enim triangula A D E, B D E, sint super æquales bases A D, D B, & inter easdem parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi A B,) erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidem triangulo A D E, æquale; Igitur triangula D B E, C E D, æqualia erunt: Habent autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta: Quare inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E, B C, parallelæ erunt; Quod est propositum. 38. primi. 1. pron. 39. primi.



ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum quod ab vtraq; diametro bifariã diuiditur, parallelogrammũ est.

NAM quadrilaterum A B C D, diuidatur bifariam ab vtraq; diametro A C, B D. Dico ipsum esse parallelogrammũ. Cum enim triangula A D C, B D C, dimidia sint eiusdem quadrilateri A B C D, ipsa inter se æqualia erunt. Quare cum eandem habeant basin D C, ad easdemq; partes sint, ipsa

39. primi. in eisdem parallelis erunt: Atq; idcirco A B, D C, parallela sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. Parallelogrammum igitur est A B C D. Quod est propositum.

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia sup̃ æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia A B C, DEF, super bases æquales B C, E F, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ B F. Si enim non est, cadet parallela ipsi B F, per A, ducta vel supra A D, vel infra. Cadat primo supra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniã igitur parallelæ sunt A G,

38.primi. B F, erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale; Ponitur autem, & triangulum DEF, eidem triangulo A B C,

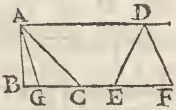
1. pron. æquale: Igitur triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum; Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A H; ducta recta HF, erũt eadẽ argumẽtatione triãgula HEF, DEF, æqualia, pars & totũ; qđ est absurdũ. Est igit̃ A D, parallela ipsi BF. Quare triãgula æqualia sup̃ æqualib⁹ basibus, &c. Qđ erat demonstrandũ.

SCHOLION.

EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

TRI-

TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.

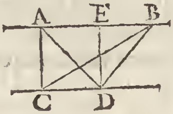


SINT triangula æqualia, ABC, DEF, inter parallelas AD, BF, & super bases BC, EF, quas dico esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit BC, maior. Abscissa ergo recta CG, æquali ipsi EF, & ducta recta GA, erit triangulum AGC, triangulo DEF, æquale. Ponitur autem & triangulum ABC, eidem triangulo DEF, æquale: Igitur triangula AGC, ABC, æqualia erũt, pars & totum; quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC, EF, sed æquales. Quod est propositum. 38.primi. 1. pron.

THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemq́; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

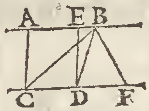
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum est trianguli ACD; Igitur & trianguli BCD, duplum erit idẽ parallelogrammũ ACDE. Quamobrem, si parallelogrammum cũ triangulo, &c. Quod erat demonstrãdũ. 37.primi. 34.primi.



SCHOLION.

HINC sequit̃, si triangulũ duplã habuerit basin, fuerit q́;

in eiſdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam ſi baſis C D. producatur ad F, vt ſit D F, æqualis ipſi C D, ducaturq; recta F B, erit triangulum B C F, duplum trianguli B C D, quod



38.primi. triangula B C D, B D F, æqualia ſint: Eſt au-

41.primi. tem & parallelogrammum A C D E, duplum eiuſdem trian-

6. pron. guli B C D: Igitur æqualia erunt triangulum B C F, & parallelogrammum A C D E.

IDEM hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodem modo, ſi parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem, fuerintq; in eiſdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo A C D E, & triangulo B F G, quorum baſes C D, F G, æquales ſunt. Ducta enim diametro A D, in parallelo-

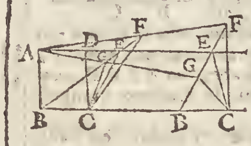
38. primi. grammo, erunt triangula A C D, B F G, æqualia; Cum igitur parallelogrammum

34. primi. A C D E, duplum ſit trianguli A C D: erit quoque idem trianguli B F G, duplum. Eadem ratione ſi baſis F G, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc eſ-

38.primi. ſet duplum etiam trianguli B F G, &c.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemq; parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.



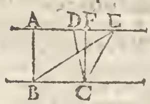
SIT parallelogrammũ A B C D, duplum trianguli E B C ſiue eandem habeant baſin, ſiue æquales; Dico rectam ductam A E, parallelam eſſe rectæ BC. Nam alias ducta parallela ex A, cadet aut ſupra

supra A E, aut infra. Vnde vt in 39. vel 40. propos. ostendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. Quod est absurdum.

S I T *deinde parallelogrammum A B C D, duplum trianguli E F G, in eisdemq; parallelis: Dico bases B C, F G, esse æquales. Nam si altera, nempe B C, sit maior, abscissa æquali C H, & ducta H I, parallela ipsi A B, demonstrabimus parallelogramma A B C D, I H C D, esse æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum est trianguli E F G; illud quidem per hypothesin, hoc vero per 41. propos.) Quod est absurdum. Idem ostendemus, si basis F G, maior dicatur. Si enim abscindatur ipsi B C, æqualis F H, ducaturq; recta H E, erunt triangula E F H, E F G, æqualia, pars & totum; (nam vtrũq; dimidium est parallelogrammi A B C D; Illud quidẽ per propos. 41. hoc vero per hypothesin.) Quod est absurdum.*

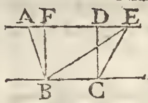
EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



I N T E R lineas parallelas A E, B C, sint constituta trapezium ABCD, & triangulum E B C, super basim B C, eandem, quæ sit tamen maior quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus esse duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam B C, sumatur A F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta C F, quæ erit parallela ipsi A B; Atq; adeo parallelogrammum erit A B C F, *33. primi* quod duplum est trianguli E B C. Quare trapezium A B C D, cum *41. primi.* sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli E B C, quod est propositum.

S I N T rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis



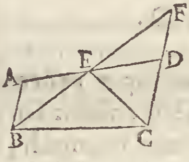
B C, sit minor quã reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, quam B C, abscindatur D F, æqualis ipsi BC, & ducatur recta B F, quæ erit paralle-

33. primi. la ipsi C D, atq; adeo parallelogrammum erit BCDF, quod duplũ

41. primi. est trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod superat parallelogrammum B C D F, maius erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.

Idem concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

Trapezium habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.



Sit trapezium ABCD, cuius duo latera opposita A B, D C, sint parallela, & super basin B C, constituatur triangulum E B C, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD: Dico trapezium ABCD, duplum esse trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe B E, donec coeat cum C D, pro-

29. primi. tracto in F. Et quia parallelæ sunt A B, C F, erunt anguli alterni,

15. primi. B A E, F D E, equales: Sunt autem & anguli A E B, D E F, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli A B E, lateri D E, trianguli D F E, æquale, per hypotesin: Igitur & reli-

26. primi. qua latera A B, B E, reliquis lateribus, D F, F E, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales. atq;

4. primi. idcirco triangula A B E, D F E, æqualia erunt. Quare addito com-

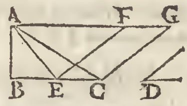
2. pron. muni triangulo C D E, erunt triangulo C E F, æqualia triangula

38. primi. A B E, C D E: Est autem & triangulum B C E, eidem triangulo C E F, æquale, quod bases B E, E F, ostẽsæ sint æquales, & ipsa triã gula inter easdẽ sint parallelas, si p C, duceretur parallela ipsi B F. Igitur triangulum C B E, æquale erit triangulis A B E, C D E; & propterea C B E, triangulum dimidiũ erit trapezii A B C D, quod est propositum.

42. PROBL. 11. PROPOS. 42.

DATO triangulo æquale parallelo gram-

grammum constituere in dato angulo rectilineo.

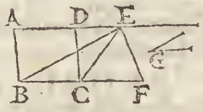


Datvm triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur construere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habẽs angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, bifariam in E, & 10.primi.
fiat angulus C E F, æqualis angulo D: Ducatur itẽ per A, 23.primi.
recta A F, parallela ipsi B C; quæ secet E F, in F. Rursus per 31.primi.
C, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritq; constitutum parallelogrammũ CEFG, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta E A; quoniam parallelogrammum C E F G, duplum est 41.primi.
trianguli AEC; & triangulum ABC, duplum eiusdem trianguli AEC, quod triangula AEC, ABE, super æquales bases BE, EC, & in eisdem parallelis, sint æqualia: Erunt paral 38.primi.
lelogrammum CEFG, & triangulum ABC, æqualia inter 6. pron.
se. Cum igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo, æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo; Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Svbivngit hoc loco Pelctarius subsequens problema.

Dato parallelogrammo æquale triangulũ constituere, in dato angulo rectilineo.



Sit datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G æqualis, seceto; recta BE, rectã AD, productã in E: Extendatũ quoq; B C, ad F, sitq; CF, æqualis rectæ BC. Dico triãgulũ BEF, habẽs angulũ EBF, 23.primi.

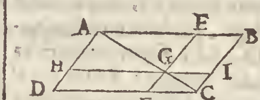
angulo dato G æqualem, æquale esse parallelogrammo ABCD. Ducta enim recta C E, erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E; Item triangulum BEF, eiusdem trianguli BCF, duplum; quod æqualia sint triangula E B C, E B F. Quare æqualia inter se erunt parallelogrammum ABCD, & triangulum B E F.

41. primi.
38. primi.
6. pron.

43.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

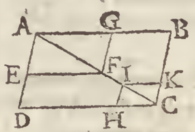
IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



IN parallelogrãmo ABCD, sint circa diametrum A C, parallelogrãma AEGH, C F G I, & complementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum enim triangula A B C, C D A, æqualia sint; Itemq; triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: Sunt autem & triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapezijs, remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.

34. primi
3. pron.
34. primi.
3. pron.

SCHOLION.

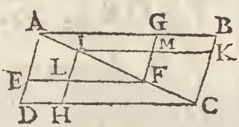


EODEM modo hoc theorema demonstratur a Proclo, etiam si duo parallelogramma circa diametrũ nõ coniungantur in puncto G, sed vel vnum ab altero sit semotum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim prius vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo A B C D, circa diametrum A C,

consistat

consistant parallelogramma A E F G, C H I K: Dico complementa D E F I H, B K I F G, *esse æqualia.* Cum enim *triangula A* B C, C D A, *æqualia inter se sint; Item triangula* A E F, C H I, *æqualia triangulis A G F, C K I; erunt reliqua complementa D E F I H, B K I F G, æqualia. Quod est propositum.* 34. primi. 3. pron.

S E C E N T *se iam mutuo parallelogramma* A E F G, CHIK, *circa diametrum, ita vt communem partem habeant I L F M;* Dico adhuc cõplementa DELH, *BGMK, esse æqualia. Cum enim*

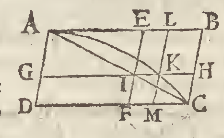


æqualia sint triangula A B C, C D A; *Item triangula A F G,* A F E; *erunt reliqua quadrilatera B* C *F G,* D C *F E, æqualia; Sunt autem rursus æqualia triangula I F M, I F L; Igitur si hæc addãtur dictis quadrilateris, erũt figuræ* BCIMG, D C *I L E, æquales: Cum igitur & æqualia sint triangula* C *I K,* C *I H, erunt reliqua complementa B G M K,* DELH, *etiam æqualia. Quod est propositum.* 34 primi. 3. pron. 34. primi. 2. pron. 34. primi. 3. pron.

C O N V E R S V M *quoq; huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.*

S I parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogrãma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia; consistent reliqua duo circa, diametrum.

D V C T I S *duabus rectis* E F, *G H, quæ sint parallelæ rectis* B C, C D, *seq; secent in I, diuidatur parallelogrammum A* B C D, *in quatuor parallelogramma, quorũ aduersa duo* B *E I H,* D *F I G sint æqualia:* Dico *reliqua duo* A *E I G,* C *F I H, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto* C *ad punctum* A, *ductam transire per punctum I. Si enim non transit, secet diameter* C *K* A, *rectam G H, in K, si fieri potest, & per K, ducatur L M, parallela ipsi* B C. *Erunt igitur complementa* BHKL, DGKM, *æqua-* 31. primi. 43. primi.



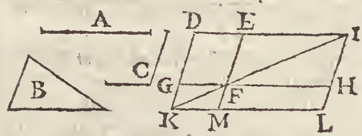
9 pron. *æqualia: Est autem DGKM, maius quā DGIF; Quare & maius erit BHKL, quā DGIF. Cum ergo DGIF, æquale ponatur ipsi BEIH, erit etiam BHKL, maius, quam BEIH, pars quàm totū; Quod est absurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.*

44. PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. oportet igitur constituere parallelogrammum ęquale triangulo B, angulum habens ęqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Cōstituatur triangulo B, æquale parallelogrāmū DEFG, habens angulū EFG, angulo C, æqualem, producaturq; GF, ad H, vt FH, sit æqualis rectæ A; & per H, ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectę DG, productæ in K; & per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturq; EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur; Habet enim latus FH, ęquale datæ rectæ A. & angulum HFM, angulo dato C, æqualē, cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Deniq; parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, cū æquale sit cōplemento DEFG, qđ factū est æquale triangulo B. Ad datā igitur rectā lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

42. primi.



31. primi.

15. primi.

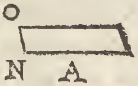
43. primi.

SCHOLION.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammū

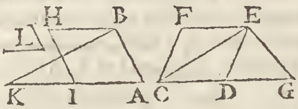
FMLH,

F M I H, ad rectam A, ex iis, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditũ fuit, effectum erit, quod quæritur.



ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.



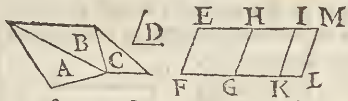
SIT data recta AB; datũ parallelogrãmũ CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, vt DG, æqualis sit ipsi CD, & iungatur GE, recta: Eritq; triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale, vt demonstrauimus scholio propos. 41. Fiat iã super data recta A B, parallelogrammum ABHI, æquale triãgulo CEG, hoc est, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, vt sit I K, æqualis ipsi AI, iungaturq; recta BK. Dico triangulum ABK, constitutum super datam rectam AB, habensq; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale esse dato parallelogrammo CDEF. Cum enim triangulum A B K, æquale sit parallelogrammo ABHI, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo CDEF, constat propositum. 44. primi.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

DATO rectilineo æquale parallelogrãmum cõstituere, in dato angulo rectilineo.

DATVM rectilineum sit A B C, & datus angulus D: oportet igitur cõstruere parallelogrammũ æquale rectilineo ABC, quod habeat angulũ æqualẽ angulo D. Resoluatur rectilineũ ĩ triãgula A, B, & C. Deinde triãgulo A, æquale paralle- 42. primi.

logram-



logrammum cõstituatur E F G H, habens angulum F, angulo D, æqualem.
44. *primi.* Item super rectam G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo, factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnũ parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, inter se sunt æquales, cum vterq; æqualis sit angulo D. Addito igitur cõmuni angulo F G H, erunt duo
29. *primi.* anguli E F G, F G H, qui duobus rectis æquiualent, æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus
14. *primi.* etiam rectis æquales erunt. Quare F G, G K, vnam rectã lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnã rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sint, (cum sint æquales oppositis an-
34. *primi.* gulis æqualibus E F G, H G K.) & duo anguli H I K, I H G,
29. *primi.* duobus sint rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint
30. *primi.* parallelæ; Itemq; E F, I K, quod vtraq; parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Dato ergo rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendũ.

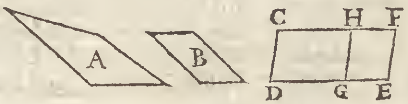
SCHOLION.

QVAMVIS in hoc problemate Euclides absolute, & simpliciter docuerit, quanam arte parallelogrammum constituatur æquale rectilineæ figuræ datæ, non astringendo nos ad certam aliquam lineam rectam datam, vt in propos. 44. fecerat: Tamen eodem modo, quod iubetur, efficiemus, si recta aliqua linea nobis fuerit assignata. Nam si detur recta linea E F, EF, super ipsam construemus parallelogrammum E F G H, æquale triangulo A. Et eodem modo super G H, constituemus aliud G H I K, æquale triangulo B, &c. Quibus peractis, constitutum erit super datam rectam E F, parallelogrammum E F L M, æquale rectilineo dato, in dato angulo F, qui æqualis est angulo D, proposito. 44.primi.

PARI ratione, propositis quotcunq; rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 42. & 44. ceu factum est ab Euclide in hoc problemate. Nam cũ omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, veluti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atq; A B, resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma E G, G I, I L, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propos. 42. & 44. erit constructũ parallelogrammũ totum EFLM, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, qđ nos tamẽ alio modo, et breuiori demõstrabim⁹, in hũc modũ.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.

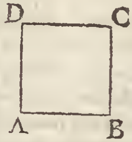


SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. Fiat parallelogrammum C D E F in quocũq; angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam C D parallelogrammum C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, superat parallelogrammum C D G H, parallelogrammo E F H G; superabit quoq; figura A, figurã B, eodẽ parallelogrãmo EFHG. Quod est propositum. 45.primi.

PRO-

PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

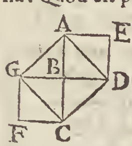


Sit data recta AB, sup quā oporteat quadratū describere. Ex A, & B, educantur AD,
11.primi. BC, perpendiculares ad AB, sintq; ipsi AB, æquales, & cōnectatur recta CD. Dico ABCD, esse quadratū. Cum.n. anguli A, & B,
28.primi. sint recti, erunt AD, BC, parallelæ: Sunt aūt & æquales, quod vtraq; æqualis sit ipsi AB; Igitur & AB,
33. primi. DC parallelæ sunt & ęquales: & ideo parallelogrammū est ABCD; in quo, cū AD, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineę æquales exiſtūt; Sunt aūt & oēs quatuor
34.primi. anguli recti, cū C, & D, æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratū igitur est ABCD, ex definitione; Ac pinde a data recta linea quadratū descripsimus; Quod faciendū erat.

EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorū æqualiū æquales sūt lineæ.

Sint primo rectæ AB, CD, æquales; Dico earū quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoq; esse. Ductis enim diametris BF, DH, erūt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus laterib⁹ DC, CH, trianguli DCH, æqualia, vtrumq; vtriq; , cū ex definitione quadrati rectæ AF, CH, æquales sint rectis AB, CD: Sunt autem, & anguli A, & C, æ-
4.primi. quales, nempe recti: Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt.
34.primi. Quæ cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.



Sint secundo quadrata ABDE, BCFG, æqualia; Dico lineas quoq; ipsorū AB, BC, ęquales esse. Cōiungantur.n. quadrata ad angulum B, vt rectæ AB, BC, in directū cōstituantur. Et quoniā anguli
14 primi. ABG, ABD, sunt recti, erūt & rectæ GB, BD, in directū cōstitutæ. Ducātur diametri AD, CG, iungāturq; rectę AG, CD. Quoniā igitur quadrata ABDE, BCFG, ęqualia sunt, erūt & triāgula ABD, BCG, eorū dimidia, æqualia. Addito ergo cōi triāgulo BCD, fiet totū triangulū ACD, toti triāgulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cū eandem

dem habeãt basin CD, ad easdẽq; sint partes, in eisdẽ sunt parallelis, ideoq; parallelæ sunt AG, CD. Et q̃m, vt in scholio propos. 34. ostẽdimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariã, erũt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoq; æquales. Quãobrẽ & parallelæ sunt AD, CG; Igitur parallelogrãmũ est ADCG, ac propterea rectæ AD, CG, æquales: Quoniã ergo in triãgulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia sũt, & anguli, q̃b⁹ ea latera adiacẽt, inter se ẽt æquales, cũ sint semirecti, vt ĩ scholio ꝓpos. 34. ostẽsum fuit; erũt reliqua latera ęqualia, nẽpe AB, ipsi BC, &c. Qđ ẽ ꝓpositũ. 39 *primi.* 27. *primi.* 34. *primi.* 26. *primi.*

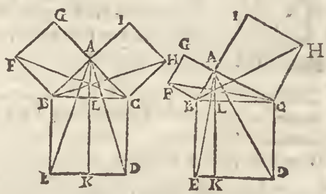
SCHOLION.

POSSENT hæc omnia multo breuius probari per superpositionẽ quadrati vnius super aliud. Nã si lineæ sunt æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsæ inter se; Cũ ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conueniẽt quoq; ipsi inter se, ideoq; totũ quadratũ toti quadrato congruet. Quod si quadrata sunt æqualia, cõgruent ipsa inter se, propter æqualitatẽ angulorũ; Igitur & lineæ; alias vnũ quadratũ alio maius esset.

THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

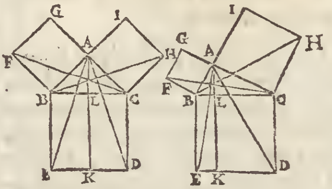
IN rectãgulis triãgulis, quadratũ, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, describãturq; super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE: Dico quadratũ BCDE, descriptũ super latus BC, quod 46. *primi.*



angulo recto opponit, ęquale esse duob⁹ quadratis ABFG, ACHI, quę sup alia duo latera sunt descripta, siue hęc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, & BAG, sunt recti, erunt rectæ GA AC, vna linea recta; eodẽq; modo IA, AB, vna recta linea erunt. 31. *primi.* 14. *primi.*

erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cũ sint recti, si addatur communis angulus A B C, fiet totus angu-
2. pron. lus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterq; totus angul[9] B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur latera A B, B E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumq; vtriq;, vt constat ex definitione quadrati; Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus;



4. primi. Erunt triãgula A B E, F B C, æqualia. Est autẽ quadratum, seu pa-
41. primi. rallelogrãmũ A B F G, duplũ trianguli F BC, cum sint inter parallelas B F, C G, & super eandem basin B F; Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quod sint inter parallelas B E, A K, & super
6. pron. eandẽ basin B E. Quare æqualia erunt quadratũ A B F G, & parallelogrammum B E K L; Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum A C H I, & parallelogrammum CDKL. Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoq; eorũm dupla, parallelogrammũ videlicet CDKL, & quadratum ACHI. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrammis B E K L, C D K L, æquale est duobus quadratis A B F G, A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

INVENTIO huius theorematis ad Pythagoram refer-
cap. 2. *tur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quod se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, cum immolasse centum boues; si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidissetq; quadratum numerum maioris æqualem esse quadratis numeris reliquorum, composuit*

posuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum esse rectum; Idque in quamplurimis alijs numeris, vt in 6, 8, 10. & in 9. 12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant unum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi uoluptate adinuenit, firmaq; ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figurā quālibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulū, siue quadrangulum, siue quinquangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes similiterq; descriptæ, ut ibidem ostendemus.

CAETERVM *quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, ut 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, ut hic ex 25. reijce vnitatem; Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula*

K tribuitur

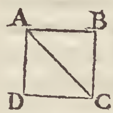
tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6; Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros. 8. & 10. primus .n. est 6. nimirũ numerus par acceptꝰ. Hac regula si accipiatꝰ par 10. reperientꝰ alij duo 24. et 26.

COLLIGVNTVR *ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quã problemata, e quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, qui vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.*

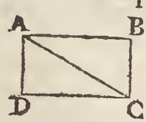
I. SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplũ erit prædicti quadrati.

IN *quadrato* A B C D, *ducatur diameter* A C; *Dico quadratum* A C, *duplum esse quadrati* A B C D. *Cum enim in triangulo* A B C, *angulus* B *rectus sit, erit quadratum lateris* A C, *æquale duobus quadratis laterum* A B, B C. *Cum igitur quadrata linearũ* A B, B C, *æqualia sint, quod lineæ* A B, B C, *sint æquales; erit quadratum lineæ* A C, *duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ* A B, *hoc est, quadrati* A B C D. *Quod est propositum.*

47. primi



II. QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.



47. primi

IN *altera parte longiori* A B C D, *ducatur diameter* A C; *& quia in triangulo* A B C, *angulus* B, *est rectus, erit quadratũ lateris* A C, *æquale duobꝰ quadratis laterũ inæqualiũ* A B B C. *Quod est propositũ.*

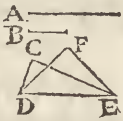
III. SI fuerint duo triangula rectangula, quorũ latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterũ vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorũ duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, *anguli*, A, & D, *sint*

ſint recti, lateraq́; oppoſita B C, E F, *æqualia: Dico duo quadrata laterum* A B, A C, *ſimul ſumpta æqualia eſſe duobus quadratis laterum* D E, D F, *ſimul ſumptis. Nam quadrata linearũ* B C, E F, *æqualia inter ſe ſunt, cum & ipſæ inter ſe ponantur æquales; Quadrato autẽ lineæ* BC, *æqualia ſunt quadrata linearum* A B, A C; *Et quadrato lineæ* EF, *æqualia ſunt quadrata linearum* D E, D F: *Perſpicuum ergo eſt, quod pronitur.* 47. primi 47. primi

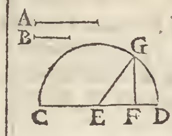
DVOBVS quadratis inęqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta æqualia duobus inæqualibus propoſitis ſimul ſumptis. IIII.

SINT A, & B *latera duorum quadratorũ inæqualiũ; Fiat angulus rectus* D C E, *ſitq́;* D C, *recta æqualis rectæ* B, *& recta* C E, *rectæ* A. *Ducta deinde recta* D E, *coniungente puncta* D, E, *ſuper ipſam conſtituantur duo anguli ſemirecti* D E F, E D F, *coeantq́; rectæ* DF, EF, *in* F. *Quoniã igitur in triangulo* F D E *anguli* FDE, F E D, *æquales ſunt, erunt & latera* D F, E F, *æqualia, ideoq́; et quadrata eorundẽ laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearũ* D F, EF, *æqualia eſſe quadratis linearũ* A, *&* B, *hoc eſt linearũ* CE, *&* CD. *Nam cum in triãgulo* DEF, *anguli* FDE, FED, *faciant vnũ rectũ, erit reliquus angulus* F, *rectus. Quamobrẽ erunt quadrata linearum* DF, EF, *æqualia quadrato linea* DE; *ſed eidẽ quadrato lineæ* DE, *æqualia ſunt quoque quadrata* C D C E; *igitur quadrata linearum* DF, EF, *æqualia ſunt quadratis linearum* D C, E C. *Quod eſt propoſitum.* 11. pron. 6. primi 32. primi 47. primi 1. pron.



PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus poteſt maior, quam minor. V.

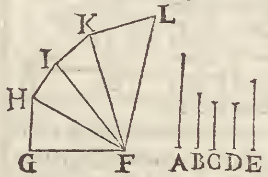
POTENTIA *lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantũ enim quæuis recta linea poſſe dicitur, quantũ eſt eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales* A, *&* B, *oporteatq́; cognoſcere, quãto maius ſit quadratũ maioris lineæ* A, *quã minoris* B. *Ex quauis linea recta* CD, *ſumatᷓ* CE, *æqualis rectæ* A, et E F. æqualis rectæ B. Deinde cētro E, & interuallo E C, semicirculus describatur C G D; & ex F, ducatũ F G ꝑpendicularis ad C D. Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ C E, sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ B, hoc est, rectæ E F, sibi æqualis, quadrato rectæ F G. Ducta enim recta E G, erit eius quadratum æquale quadratis rectarum E F, F G. Quocirca quadratum rectæ E G, hoc est, quadratum rectæ E C, illi æquale, superabit quadratum rectæ E F, quadrato rectæ F G. Quod est propositum.



47. primi

VI. PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis ęquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. oportet igitur inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus rectus F G H, sitq́; recta F G, æqualis rectæ A, & recta G H, rectæ B; Ducta deinde recta H F, fiat angulus rectus F H I, sitq́; H I, æqualis rectæ C: Ducta rursus recta I F, fiat angulus rectus F I K, sitque I K, æqualis rectæ D: Ducta denique recta K F, fiat angulus rectus F K L, sitque K L, æqualis rectæ E. Si igitur ducatur recta F L; Dico quadratum rectæ F L, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ F H, æquale est quadratis rectarum F G, G H, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ F I, æquale est quadratis rectarum F H, H I, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ F K, æquale est quadratis rectarũ F I, I K, ideoq́ue quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ F L, æquale est quadratis rectarum F K, K L, ac propterea quadratis rectarũ A, B, C, D, & E, Quod est propositum.



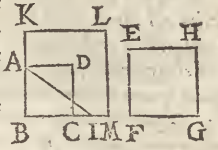
47. primi.

VII. PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram,

qu*

quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiam quadrata.

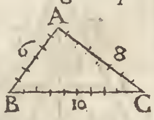
Sint duo quadrata A B C D, E F G H, *propositumque sit quadrato* A B C D, *apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato* E F G H, *&c. Sumatur recta* B I, *æqualis rectæ* F G, *lateri quadrati* E F G H. *Ducta autem recta* A I, *& producta recta* B A, *ad partes* A, *accipiatur* B K, *æqualis rectæ* A I, *perficiaturque quadratum* BK-L M. *Dico figuram* A D C M L K,



quadrato A B C D *adiunctam, æquale esse quadrato* EFGH. *Quoniam quadratum rectæ* A I, *hoc est, quadratum* B K-L M, *æquale est quadratis rectarum* A B, B I, *hoc est, quadratis* A B C D, EFGH; *si auferatur commune quadratum* A B C D, *remanebit figura* A D C M L K, *æqualis quadrato* E F-G H. *Quod est propositum.* 47. primi

Cognitis duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire. VIII.

Sit angulus A, *rectus in triangulo* A B C. *sintque primo cognita latera* A B, A C, *circa angulum rectum, quorum* A B, *ponatur 6 palmorum, &* A C, 8. *Quoniam igitur quadrata rectarum* A B, A C, *nempe palmi* 36. *&* 54 *æqualia sunt quadrato rectæ* BC; *si illa coniungantur simul, efficietur hoc palmorum* 100. *Latus ergo* BC, *continebit* 10. *palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata* 100. *palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint secundo cognita latera* A B, B C, *sitque* A B, 6. *palmorum, &* B C, 10. *Quoniam igitur quadrata rectarũ* A B, A C, *æqualia sunt quadrato rectæ* B C; *si quadratum rectæ* A B, *quod continet palmos* 36. *detrahatur ex quadrato rectæ* B C, *quod est palmorum* 100, *remanebit quadratum rectæ* A C, 64. *palmorum. Latus ergo* A C, *continebit* 8. *palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus* 64. *palmorum. Quod* 47. primi 47. primi.

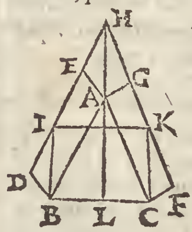


eſt propoſitum. Cæterum non ſemper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnes numeri habent latus, radicemve quadratam, vt notum eſt apud Arithmeticos; Vnde latus inuentum ſæpe numero exprimi nequit, niſi per radicem ſurdam, quam vocant: Sed de his alias.

THEOREMATE *vero hoc Pythagoreo multo vniuerſalius eſt illud, quod a Pappo demonſtratur in omni triangulo, ſiue illud rectangulum ſit, ſiue non, & de quibuſcunq; parallelogrammis ſuper latera trianguli conſtructis, tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamſi non ſint inter æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo propoſuimus, & meo iudicio generalius.*

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſunt parallelográmo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelũ rectæ ductæ ab angulo, qué duo illa latera cõprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorũ lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli dicti producantur.

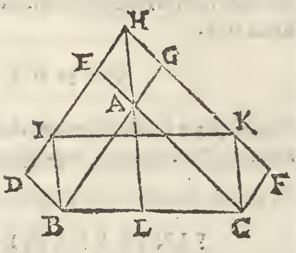
SIT *triangulum quodcunque* ABC, *conſtituanturq́; ſuper latera* AB, AC, *parallelogramma quæcunque* ABDE, ACFG, *quorum latera* DE, FG, *quæ lateribus* AB, AC, *aſſumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli* A, *dictis lateribus* AB, AC, *cõprehenſi, conueniant in* H, *ducaturq́; recta* AH. *Dico parallelográma* AD, AF, *æqualia eſſe parallelográmo ſup latus* BC, *deſcripto, cuius alterũ latus æquale ſit, & parallelũ rectæ* AH. *Producta enim* HA, *ſecet* BC, *in* L; *& per* B, C, *agantur* BI, CK, *parallelæ ipſi* AH; *iungaturq́; recta* IK.



Quoniã igitur parallelogramma ſunt BIHA, CKHA, *erit vtraq;* BI, CK, *ipſi* AH, *æqualis;* 34. primi *atque adeo & inter ſe æquales erunt* BI CK, *quæ cũ ſint etiã parallelæ,* 30. primi *quod eidem* AH, *parallelæ ſint; erunt quoque* BC, IK, 33 primi *parallelæ, & æquales. Quare parallelográmum eſt* BCKI *ſup latus*

latus BC,*habēs alterū latus* BI,*rectæ* A H, *æquale,& parallelū: Cui quidē æqualia ostendēda sunt parallelogrāma* A D, *AF. Quia æqualia sunt parallelogrāma* AD, ABIH *quod eādē habeant basin* AB, *in eisdemq́; sint parallelis* AB, HD;*Est* 35. *primi*
autē ABIH, *parallelogrāmo I L, æquale, quod illud cum hoc etiā eandē habeat basin* B I,*in eisdemq́; sit parallelis* BI, *LH:* 35. *primi.*
Erit quoque A D, *eidem I L, æquale. Non aliter ostendemus,* AF,*ipsi* K *L,esse æquale. Quare parallelogramma* AD,AF, *parallelogramo* BK, *æqualia sunt. Quod est propositum.*

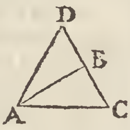
*P*APPVS *cōstruit figurā aliter. Nam sumit rectas* AC, AE;*et* AB, AG, *in directū positas, ita vt parallelogrāma* AD,AF,*sint æquiangula,habētia angulos* AED, AGF, *angulo* BAC, *īternos externo, æquales ceu hæc eius figura īdicat. Sed nos vniuersalius rē ꝓposuim⁹, vt manifestū est.*



THEOR. 34. PROPOS. 48. 47.

SI quadratū, quod ab uno laterū trianguli describitur, æquale sit eis, quæ a reliq̃s trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum A B C,sitq; quadratū latetis AC, æquale quadratis reliquorū laterū BA,BC: Dico angulū ABC,esse rectū. Ducatˀ namq; B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C,connectaturq; recta A D. Quoniā igitur in triāgulo ABD, angulus A B D, rectus est,erit quadratum rectæ A D, æquale 47. *primi*
quadratis rectarū BA,BD: Est autē quadratū rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale,ob linearū æqualitatem:



ta̧ē: Quare quadratũ rectę AD quadratis rectarũ BA, BC, æquale erit. Cũ ergo quadratũ rectę AC, eisdē quadratis rectarũ BA, BC, ęquale ponat̃, erũt quadrata rectarũ AD, AC, inter se æqualia, ac propterea & rectę ipsę AD, AC, æquales. Quoniã igitur latera BA, BD triãguli ABD, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & basis AD, ostensa est æqualis basi AC; erunt anguli ABD, ABC, æquales: Est autem angulus ABD, ex constructione rectus: Quare & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

8. *primi*

SCHOLION.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM II.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulũ.

AGIT Euclides in secundo hoc libro de potentiis linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partiũ cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectãgula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis cõtineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum; Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti; Cuius quidem duo tantum sunt genera, Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo

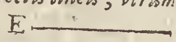
lelogrammo ABCD, *angulus A, rectus: Dico reliquos tres angulos* B, C, D, *rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint*

29. primi A D, BC, *erunt anguli* A, *&* B, *interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur et B, rectus erit. Quoniam vero quilibet suo opposito*

34. primi *est æqualis, vt angulus* A, *angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.*

DICIT *itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ unũ eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis* AB, AD; *vel sub* A D, DC; *vel sub* DC, CB, *vel deniq; sub* AB, BC; *quoniam qualibet huiusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt* A B, *uel* D C, *eius longitudinem; altera vero, ut A D, vel* B C, *eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam* A D, *moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A. ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.*

ITAQVE *parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentũ, erit idem, quod parallelogrãmũ ABCD; quoniam latus A B, æquale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.*

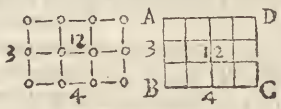


PERSPICVVM *est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum; Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis sit*

ſit lineæ oppoſitæ, erũt oĩa quatuor parallelogrãmi rectãguli latera æqualia: Quare ex definitione quadrati quadratum erit. 34. primi.

ITEM manifeſtũ eſt, ſi duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque vtrique, rectangulũ parallelogrãmum ſub prioribus duabus comprehenſum, æquale eſſe ei, quod ſub duabus poſteriobus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia ſunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiã ratione demonſtrari poteſt. Sint rectæ A B B C, æquales rectis DE, EF vtraq; vtriq; Dico parallelogrammum rectangulum A B C G, contentũ ſub AB, BC æquale eſſe parallelogrammo rectãgulo DEFH, contento ſub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cũ latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, EF, triãguli DEF; & anguli B, & E, æquales, nempe recti, erunt triangula ABC, DEF, æqualia; Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF: Quare tota parallelogramma A B-CG, DEFH, æqualia erunt. 4. primi

HABET autem cõprehenſio hæc parallelogrammi rectanguli ſub duabus rectis lineis angulum rectũ continentibus, magnam affinitatẽ cum multiplicatione vnius numeri in alterũ. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formã parallelogrãmi cõſtituitur, vnde et contineri dicitur ſub 3. & 4: Ita quoq; parallelogrãmũ rectangulũ ABCD, cõprehẽſum ſub duabus rectis AB, BC. quarũ illa ſit 3. palmorũ, hæc autẽ 4 cõſtat 12. palmis quadratis, q quidẽ ex ductu lineæ AB, 3. palmorũ in lineã BC, 4. palmorũ pducuntur, vt figura indicat notumq; eſt Arithmeticis, atq; Geometris. Demõſtratur autẽ a Ioan. Regiomont. lib. 1. de triãgulis propos. 16. Hinc fit, vt nõnulli dicat, parallelogrãmũ rectãgulũ gigni ex ductu duarũ linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ AB, in lineã BC, vel (quod idem eſt) ex ductu lineæ B C, in lineam AB. Idem enim parallelogrammum procreatur, ſiue minor linea in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur



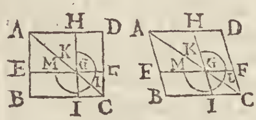
producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4, quam ex 4. in 3 producitur hic numerus 12.

OBITER *quoque monendus mihi lector uidetur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eædem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur; Vt superius parallelogrammum appellant* A C, *vel* B D.

II.

IN omni parallelogrammo spatio, unũquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon uocetur.

IN Parallelogrammo A B C D, *siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter* A C, *ex cuius puncto quolibet* G, *ducantur rectæ* E F, H I, *parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo* E H, I F, *dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo* B G, G D, *complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, ut ex* I F, *vna cum duobus complementis* B G, G D, *qualis est figura* E B C D H G E, *quam complectitur circunferentia* K L M, *dicitur Gnomon. Eadem ratione figura* F D A B I G F, *composita ex parallelogrammo* E H, *circa diametrum, & duobus*



bus complementis B G, GD, *Gnomon appellabitur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C. quarum BC, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C: Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.

Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A; Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturq; recta F G. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, uel C F. Itaque D H, E I, cum parallelæ sint ipsi B G, inter se quoque parallelæ erũt: Rursus eædem, cum ex cõstructione parallelogramma 33. *primi* sint B H, B I, æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit re- 34 *primi* ctangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B D; Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E; Item rectangulum E F sub A, & segmento E C. Quare cum rectangula B H, D I, E F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, et segmentis B D, DE, EC, compre-

compreheduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, ut lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus uerbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq;, vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur, id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Cōmandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum cōprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis unius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, *rectum angulum* A, *continentes, quæ secentur in partes* AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. *Dico rectangulum sub rectis* AB, AC, *cōprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub* AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB GH; FB, HC, *continentur. Cōpleatur rectangulū* AI, *ducanturq;* DK, EL, FM. *parallelæ ipsi* AC, *vel* BI: *Item* HN, GO, *parallelæ ipsi* AB, *vel* CI; *quæ secent priores in* P, Q, R, S, T, V. *Quoniā igitur rectangulum* AS, *cōtinetur sub* AD, AG; *&* GP *sub* AD, GH; *&* HK, *sub* AD, HC; (*quod rectæ* GS, HP, *ipsi* AD, *sint æquales:*)

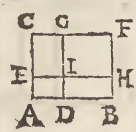
34. primi

Item

Item rectangula DT, S Q, PL, continentur sub D E, A G; DE, GH; DE, HC; (quod DS, SP, PK, ipsis AG, GH, HC, 34. primi æquales sint, & ST, P Q, ipsi DE) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur sub EF, AG; EF, GH, EF, HC; Nec non rectangula FO, VN, RI, sub FB, A G; F B, GH; F B, H C; perspicuum est, rectangulum sub A B, A C, æquale esse rectangulis sub singulis partibus A D, D E, E F, FB, & quolibet segmentorum A G, G H, H C, comprehensis. Quod est propositum.

Si sint duę rectę lineę, secenturque ambæ utcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo sub una parte unius, & una parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, una cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

Sint duæ rectæ A B, A C, angulum continentes rectum A, quæ secentur utcunque in D, & E; Dico rectangulum comprehensum sub A B, A C, una cum rectangulo comprehenso sub partibus AD, E C, æquale esse rectangulis contentis sub A B, E C; A C, A D; una cum rectangulo sub D B, A E, comprehenso. Compleatur rectangulum A F, agaturque per D, recta D G, ipsi A C, vel B F, parallela; nec non & per E, recta E H, secans D G, in I, parallela ipsi A B, vel C F. Quoniam igitur rectangulum A F, æquale est rectangulis E F, D H, A I; si addatur commune E G, erunt rectangula A F, E G, nempe sub totis A B, A C, & partibus A D, E C, comprehensa, æqualia rectangulis E F, A G, D H, sub A B, E C; A C, A D; D B, A E, comprehensis æqualia. Quod est propositum.



In numeris etiam hæc eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres

partes

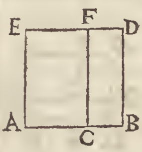
partes. 2. 3. 5. posterior vero in duas 3 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; simul additi 80. vt volebat theorema 1 Federici.

RVRSVS, si ijdem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoq; est 80. numerum productũ ex 10 in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6 æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

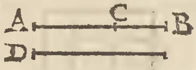
SI recta linea secta sit utcunque, Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

RECTA linea A B, diuidatur utcunque in C, duas in partes; Dico duo rectangula comprehensa sub tota A B, & segmentis A C, C B, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ A B. Describatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F parallela rectæ A E, vel B D, quæ æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B. *34. primi* Quoniam igitur recta A E, æqualis est rectæ A B, ex definitione quadrati, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C; similiter erit rectangulum CD, comprehensum sub A B, & segmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est rectangula comprehensa sub A B, & segmentis A C, C B, æqualia esse quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea secta sit utcunque, &c. Quod demonstrandum erat.



ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B, Quoniam

Quoniam igitur A B, diuisa est in C, erit rectãgulum comprehensum sub insecta D, & recta A B, nempe



quadratum rectæ A B, æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub A B, &, singulis segmentis A C, C B, quod est propositum. 1. secundi.

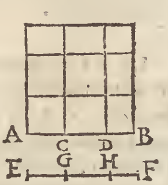
SCHOLION.

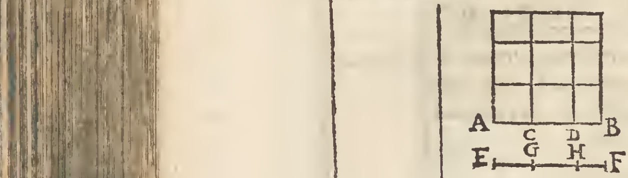
QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunq; , idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.

SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta secetur in quotcumq; segmẽta: quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta A B diuisa in partes quotcunq; A C, C D, D B. Dico quadratũ ex A B, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus A C, C D, D B, & quolibet segmentorũ A C, C D, D B, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D,





D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B, comprehensis. Sumpta enim recta E F, quæ æqualis sit ipsi A B, diuisaq; in partes E G, G H, H F, partibus A C, C D, D B, æquales; Erit ex ijs, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub A B, E F, hoc est, quadratum ipsius A B æquale rectangulis sub A C, E G; A C, G H; A C, H F: C D, E G; C D, G H; C D, H F: D B, E G; D B, G H; D B, H F. Cum igitur partes A C, C D, D B. partibus E G, G H, H F, sint æquales; Erit quoque quadratum ex A B, æquale rectangulis sub A C, A C; A C C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D, D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B. Quod est propositum.

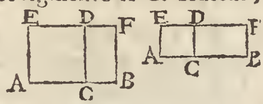
In numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secta sit vtcunq; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato.

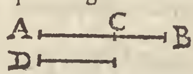
Linea recta A B, diuisa sit vtcunq; in puncto C: Dico rectangulum comprehensum sub tota A B, & vtrouis segmento, vt A C, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis A C, C B, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti A C. Constituatur enim quadratũ dicti segmenti A C, quod sit A D, & ex

& ex B, educatur B F, parallela ipsi A E, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectę A C, æqualis est ex quadrati definitione, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C. Rursus, quia recta C D, eadem ratione æqualis est rectæ A C, erit rectangulum C F, comprehensum sub segmẽtis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F,



æquale sit quadrato A D, & rectangulo C F; liquido constat, rectangulum sub A B, tota, & segmento A C, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis A C, C B, & quadrato prædicti segmenti A C. Itaq; si recta linea secta sit vtcunq;, &c. Quod erat ostendendum.

A L I T E R. Accipiatur recta D, æqualis segmento A C. Quoniam recta A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehẽsum sub D, & A B, hoc est, sub A B, & A C, æquale rectangulo sub D, & C B, *1. secundi.* hoc est, sub A C, C B, & rectangulo sub D, & A C, hoc est, quadrato segmenti A C; quod est propositum.



S C H O L I O N.

V T hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem eße numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49, quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

S I recta linea secta sit vtcunq; Quadratum, quod a tota describitur, æquale est

 & illis,

& illis, quæ a ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA A B, diuiſa ſit vtcumq; in C. Dico quadratum totius rectæ A B, ęquale eſſe quadratis ſegmentorum A C, C B, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis A C, CB. Deſcribatur ſuper A B, quadratum A D, ducaturq; diameter B E. Deinde ex C, agatur, C F, parallela rectæ B D, ſecans diametrum in G, puncto, per quod rurſus ducatur HI, parallela rectę AB; Eritq; quadratum AD, diuiſum in quatuor parallelogramma.

Quoniam igitur trianguli ABE, duo la-
5. primi. tera A B, A E, æqualia ſunt; erunt duo anguli ABE, A EB,
32. primi. æquales: Atqui tres anguli ABE, AEB, BAE, triãguli ABE, duobus rectis ſunt ęquales; & BAE, rectus eſt: reliqui ergo anguli ABE, AEB, ſemirecti erunt. Eadẽ ratione oſtendes, angulos DBE, DEB, ſemirectos eſſe. Quod etiam conſtat ex ijs, quæ ad 34. propoſ. lib. 1. demonſtrauimus. Nam, vt ibi oſtẽſum eſt, diameter B E, diuidit angulos rectos ABD,
32. primi. AED, bifariam. Quia ergo anguli tres trianguli EFG, ęquales ſunt duobus rectis; & angulus E F G, rectus eſt, cum ſit
29. primi. ęqualis recto D, externus interno; nec nõ FEG, ſemirectus; erit & reliquus EGF, ſemirectus, ideoq; ęqualis angulo F E G.
6. primi. Quare æqualia erunt latera EF, & FG; quæ cum ſint æqua-
34. primi. lia oppoſitis lateribus GH, HE, erit parallelogrammũ F H, quadratum, cum omnia eius latera ſint æqualia, & omnes anguli recti. Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata ſunt ſegmentorum A C, CB, quod
34. primi. H G, recta æqualis ſit rectę A C; & rectãgula A G, DG, comprehenſa erunt ſub ſegmẽtis A C, CB, propterea quod C G, G I, ęquales ſint rectæ CB; & FG, æqualis rectæ GH, hoc eſt rectæ A C. Quocirca cum quadratum A D, ęquale ſit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; conſtat quadratũ A D, totius lineæ A B, ęquale eſſe quadratis ſegmentorum A C, CB, & rectãgulo cõprehẽſo ſub eiſdẽ ſegmẽtis A C, CB, bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecta ſit vtcũq;, quadratum, quod a tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

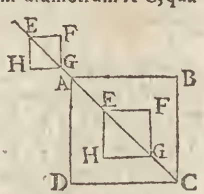
ALI-

ALITER. Quoniam recta A B, diuisa est in C, erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quę sub tota A B, & segmentis A C, C B, comprehē- duntur: Rectangulum autem sub A B, & A C, comprehensum, æquale est rectangulo comprehenso sub A C, C B, & quadrato segmenti A C; Item rectangulum sub A B, C B, comprehensum, æquale est rectangulo sub C B, A C, comprehenso, & quadrato segmēti C B. Igitur quadratum rectę A B, ęquale est quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulis sub A C, C B, & sub C B, A C. quod est propositum. 2. *secundi.* 3. *secundi.*

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demōstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrū B E, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H; Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilo minus verum est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, consistat parallelogrammum F H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamē habeat latera lateribus quadrati B D, parallela; Dico F H, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint A B, E F, erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus & externus; atq; eadem ratione anguli B CA, F G E, æquales erūt: Sunt autem anguli B A C, B CA, semirecti, vt ostensum iam fuit; Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt, propterea q; latera E F, F G, illis opposita, æqualia, & angulus F, rectus. Quare cū E F, F G, latera æqualia sint oppositis lateribus G H, H E; erit F H, quadratum. Quod est propositum. 29. *primi.* 32. *primi.* 6. *primi.* 34. *primi.*



SCHOLION.

In numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus vtcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE *autem ex hoc theoremate demonstrabimus; Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum esse quadrati ex hac descripti. Sit enim linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ* A B, *quadruplum esse quadrati rectæ* K. *Nam diuisa A B, bifariã in* C, *si fiat constructio, vt in theoremate; erunt quatuor parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorũ latera sint æqualia, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. omnesq́; anguli recti. Quare cum quadratum* A D, *æquale sit quatuor quadratis A G,* C I, I F, F H, *erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A* C *hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi A* C. *Est .n. vtraq; dimidia lineæ A* B.

BREVIVS. *Ex hac propositione, quadratum rectæ* A B, *æquale est quadratis rectarum A* C, C B, *& rectangulo sub rectis lineis* A C, C B, *bis comprehenso.* Cum *igitur quadrata rectarum æqualium A* C, C B, *æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus A* C, C B, *quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ* A C; Constat *quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ* A C, *cum æquale sit quatuor quadratis æqualibus quadrato rectæ* A C.

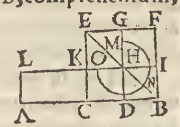
E CONTRARIO *ostendemus; Si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum esse lateris huius. Sit enim quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ* K. Dico *latus A B, duplum esse lateris* K. *Nam diuisa recta* A B, *bifariam in* C, *vt A B dupla sit ipsius A C; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ A* B, *quadruplum quadrati rectæ A C; Erat autem & quadruplum quadrati rectæ* K. *Igitur æqualia sunt quadrata rectarum* K, *&* A *C, & ipsæ rectæ* K, *&* A C, *æquales. Est autem* A B, *ex constructione, ipsius A* C, *dupla.* Dupla *igitur etiam erit ipsius* K. *Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos.* 20. *lib. 6.*

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Rectãgulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vnã cũ quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod a dimidia deſcribitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt ſectionum intermedia recta ſit C D, qua dimidia C B, minus ſegmentum D B, ſuperat, vel qua maius ſegmentum A D, dimidium A C, excedit: Dico rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus A D, D B, comprehenſum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas eſt ſectiones, æquale eſſe quadrato dimidiæ C B. Deſcribatur enim C F, quadratum ſuper dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, re-



cta D G, parallela rectæ B F, ſecans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela I K; Item ex A, rectæ C E, parallela A L, ſecans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium præcedentis propoſ. D I, K G, quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: Eſt autem & K H, ipſi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur ſub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaq; eſt rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eſſe quadrato C F. Quoniam ergo complementa C H, F H, æqualia ſunt; ſi addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale; Eſt autem & A K, eidem C I, æquale, quod & baſes A C, C B, æquales ſint: Igitur D F, A K, æqualia inter ſe erunt; quibus ſi commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia ſint quadrato C F, erit & rectangulum

34.*primi.* 43.*primi.* 36.*primi.*

A H, vna cum quadrato A G, ęquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non ęqualia, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

ALITER hoc theorema ex Francisco Maurolyco demonstrabimus, hoc modo: Quia quadratum ex C B, æquale est quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis sub C D, D B: Et rectangulo sub C D, D B, vna cum quadrato ex D B, æquale est rectangulum sub C B, B D; Erit quadratum ex C B, æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo sub C D, D B, & rectangulo sub C B, B D, vel sub A C, B D. Atqui rectangulis sub A C, B D, & sub C D, D B, æquale est rectangulum sub tota A D, D B. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo sub A D, D B; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandũ.

4. secundi.
3. secundi.
1. secundi.

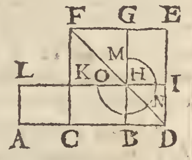
IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10 æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI Recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tũ ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectũ adiungatur B D: Dico rectangulum comprehensum sub tota cõposita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namq; C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D; Item ex A, ducatur



rectæ C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 4. propos. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectæ D B, ęqualis; Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehendetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaq; est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, æquale est parallelogrãmo C H, quod bases A C, C B, æquales sint; Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaq; si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædã linea in rectũ adijciatur, &c. Quod erat demonstrandũ.

34. primi. *36. primi.* *43. primi.*

SCHOLION.

ALITER idem ostendemus ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex C D, æquale est quadratis ex C B, B D, vna cum rectangulo bis sub C B, B D; hoc est, vna cum rectangulis sub C B, B D, & sub A C, B D. Est autem rectangulis sub A C, D B; C B, D B; & sub D B, D B, hoc est, quadrato ex D B, æquale rectangulum sub A D, D B. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B vna cũ

4. secundi. *1. secundi.*

rectan-

rectangulo ſub A D, D B: Hoc eſt, rectangulum ſub A D, DB, vna cum quadrato ex C B, æquale eſt quadrato ex C D. Quod demonſtrandum erat.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero compoſito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem eſſe 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

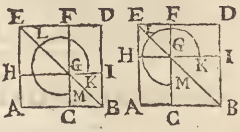
Ex hoc porro theoremate colligitur proprietas inſignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ conſiſtit in eodem ſemper exceſſu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, ſuperet C D, magnitudine A C, hoc eſt, C B; & C D; ſuperet B D, eadem magnitudine C B: habebunt lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam. Quare cum oſtenſum ſit, rectangulum ſub extremis A D, B D, vna cum quadrato exceſſus C B, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ C D; perſpicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectãgulum ſub extremis contentum, vna cum quadrato exceſſus, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent exceſſum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem exceſſum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato exceſſus 3. æqualis eſt quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI recta linea ſecetur vtcunq;; Quod a tota, quodq́; ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato.

RECTA

RECTA AB, secetur vtcunq; in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vnà cũ quadrato reliqui segmẽti CB. Describatur.n.super AB, quadratũ AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C. recta CF, parallela rectæ AE, secãs diametrũ in puncto G, per qđ agat̃ HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollariũ 4. propos. huius lib. CI, HF, quadrata, & quia recta GH, æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, ęqualis est ipsi AB, erit rectangulũ AF, cõprehensum sub tota AB, & segmẽto AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehensum erit sub eisdẽ rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, ęquale est quadratũ AD; si apponatur cõmune quadratũ HF, erũt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quę comprehenduntur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod erat demonstrandum. 34. primi.



SCHOLION.

ALITER *ex Francisco Maurolyco idem demonstrabimus. Quia quadratum ex* A B, *æquale est quadratis ex* A C, C B, *vna cum rectangulo bis sub* A C, C B; *si addatur commune quadratum ex* A C, *erunt quadrata ex* A B, A C, *æqualia quadratis ex* A C, C B, A C, *vna cum rectangulo bis sub* A C, C B. *Sed rectangulo sub* A C, C B, *vna cum quadrato ex* A C, *æquale est rectangulum sub* A B, A C; *Et proinde rectangulo bis sub* A C, C B, *vna cum quadrato ex* A C, *bis, æquale est rectangulum sub* A B, A C, *bis. Igitur quadrata ex* A B, A C, *æqualia sunt reliquo quadrato ex* C B, *vna cum rectangulo bis sub* A B, A C. *Quod demonstrandum erat.* 4. secundi. 3. secundi.

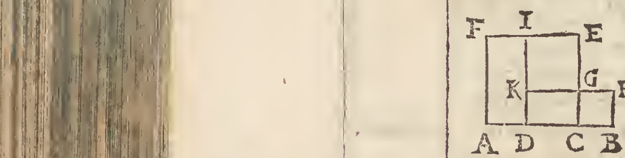
IN

IN numeris autem, diuidatur numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cũ 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta A B, in partes inæquales A C, C B, sitq; maior pars A C; ponatur autem minori parti C B, æqualis linea AD; vt D C, sit excessus, quo pars A C, superat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub A C, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur quadrata AE, CH; & agatur D I, ipsi C E, parallela, producaturq; H G, ad K. Itaq; quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc est C E, toti DB, æqualis; Est autẽ & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit CH: Igitur & reliqua GE, reliquæ DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E,



34. *primi.* ipsi DC, sit æqualis; erunt GE, IE, æquales: ideoq; IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est. n. AC, vtriq; lineæ AF, DB; & CB, vtriq; AD, BH, æqualis:) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus A C, C B, vna cum quadrato I G, excessus DC. Quod est propositum.

SCHOLION.

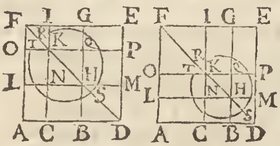
IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita

ita vt maior pas superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16.36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui fit ex 4. in 6. bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI recta linea secetur vtcunq; Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorũ, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuisa vtcunq;. Dico rectangulum quater comprehensum sub A B, & segmento siue maiore, siue minore C B, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto segmento C B, componitur. Producatur A B, versus dictum segmentum C B, ad D, sitq; B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E; Ducta autem diametro



D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipsi D E, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium propos. 4. huius lib. O I, N Q, B M, quadrata. Et quia O K, æqualis est rectæ A C, erit O I, quadratum segmenti A C: Rursus quia N H, æqualis est rectæ C B, erit N Q, quadratũ segmenti C B, ideoq; quadrato B M, æquale, cũ rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ B H, H Q, æquales sunt segmento CB; Atq; adeo duo rectangula A H, L Q, comprehensa erunt sub A B, & segmento C B, cum L H, sit æqualis rectæ A B. Eadẽ rõne erũt duo rectan-

34. primi. *34. primi.* *34. primi.*

rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cũ NH,
34. primi. HM, rectæ æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ LH, hoc est, rectæ AB: Et quia quadratum NQ, BM, equalia sunt; si addatur commune KG, erũt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinq; rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quãobrem, si recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod demonstrãdum erat.

SCHOLION.

ALITER idem ex Francisco Maurolyco demonstrabi-
4. secundi. *mus. Quia quadratũ ex AD æquale est quadratis ex AB, BD, vna cũ rectangulo sub AB, BD, bis; hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: Et quadrata ex AB, BC, æqualia sunt rectangulo bis*

7. secundi. *sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratũ ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.*

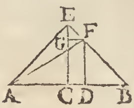
SECETVR iam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

9. THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & nõ æqua-

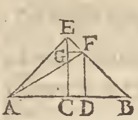
æqualia; Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

Secetur recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, DB, dupla esse quadratorum, quę fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B; Ducanturq; rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoq; ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturq; AF. Quoniam igitur in triangulo A C E,



latera C A, C E, æqualia sunt; erunt anguli C A E, C E A, æquales. Est autem angulus A C E, rectus; reliqui igitur anguli alium rectum conficient, ideoq; A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, semirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rursus, quia trianguli F G E, angulus E G F, æqualis est recto E C B, externus interno; erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum; igitur & E F G, semirectus erit, proptereaque cum anguli F E G, F G E, æquales sint, erunt & latera E G, G F, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, esse æqualia; nam angulus F D B, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo A C E, angulus C, rectus sit, erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E; Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia; quod & lineæ A C, C E, æquales sint; Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus, quia in triangulo E G F, angulus G, rectus est, erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F; At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum E G, G F; Igitur

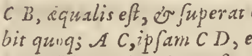
5.primi.
32.primi.
29.primi.
32.primi.
6.primi.
47.primi.
47.primi.



34. *primi.* Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineę C D; Est enim CD, recta rectæ FG, æqualis, cum C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectárum A C, C D.
47. *primi.* Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, æqualia
47. *primi.* quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla sunt duorum quadratorum rectarum A C, C D. Atqui quadratum rectæ D F, æquale est quadrato rectæ D B; ostensum enim est, rectas D F, DB, esse æquales. Quare duo quoq; quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & inter mediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoq; A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis vna cum quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorũ ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo



4. *secundi.* *sub A C, CD, bis, est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

ALITER ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex
4. *secundi.* *linea recta A D, descriptum æquale est quadratis descriptis ex A C, CD, vna cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune ponatur quadratum ex D B, erunt quadrata ex A D, D B, æqualia quadratis ex A C, CD, DB, vna cum rectangulo bis sub A C, CD, vel*

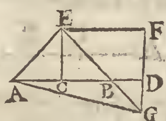
vel sub B C, C D, Atqui quadrato ex D B, vna cum rectangulo, bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, DB, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod ostendendum erat. 7. secundi.

IAM vero rursus numerus, 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

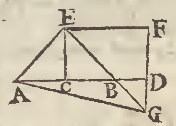
THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectũ quæpiam recta linea: Quod a tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquã ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D: Dico duo quadrata rectarum A D, B D, dupla esse quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, uel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur DF, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iã, angulum A E B, esse rectum, ut in præcedenti propos. & C E B, semirectum; ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque: Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo 29. primi 34. primi



lelogrammo C F, recto angulo C, opponatur, Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi EGF æqua-
32. primi
6. primi lis. Quare rectæ E F, FG, & angulis FEG, EGF, opposite, æquales erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G esse æquales, propterea quod angulus B D G sit rectus, & BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C,
47. primi C E, erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ AC.



47. primi Rursus quia quadratũ rectæ E G, quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, FG, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplũ quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ CD, cum C D,
34. primi recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum: Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G,
47. primi æquale est quadratum rectæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis æqualibus A D, DG, descibuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi CB, est æqualis, & superat C D, ipsam CB, recta B D; superabit quoque CD, ipsam A C, eadem recta B D. Quare, vt ad 7. ppos. huius lib. ostẽdimus, quadrata ex A C, CD, æqualia sunt

rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarũ A C, CD, & rectangulum sub A C, CD, bis, vna cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, CD; Atqui quadratis
4. secundi *rectarũ A C, CD, vna cũ rectangulo sub A C, C D, bis, æquale est quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarũ A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

ALITER

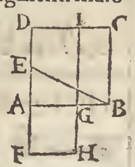
ALITER ex Francisco Maurolyco. Quia quadratũ ex AD, *æquale est quadratis ex* A C, C D, *vna cũ rectangulo bis* 4.*secundi*
sub AC, C D, *vel sub* B C, C D; *si commune addatur quadratũ ex* B D, *erunt quadrata ex* AD, BD, *æqualia quadratis ex* A C, CD, BD, *vna cũ rectangulo bis sub* BC, CD. *Sed quadrato ex B D, vna cũ rectangulo bis sub B C, C D, æqualia* 7.*secundi*
sunt quadrata ex C D, BC, hoc est, quadrata ex A C, CD. Igitur quadrata ex A D, B D, *æqualia sunt quadratis ex* A C, C D, *bis; Ac proinde quadrata ex* AD, BD, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D; *Quod erat demonstrandum.*

NVMERVS 10 bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quiuis 3. vt totus numerus cõpositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorũ 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, ut perspicuum est.

PROBL. 1. PROPOS. 11. 11.

DATAM rectam lineam secare, ut cõprehensum sub tota, & altero segmentorũ rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta A B, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum cõprehensum sub tota A B, & minori eius segmento, æquale sit quadrato reliqui segmenti maioris. Describatur ex A B, quadratũ A C, & diuiso latere A D, quod cũ linea data A B, angulũ rectũ efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis sumatur E F; & ipsi A F, abscindatur ex recta A B, data æqualis A G. Dico rectam A B, sectã esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub A B, & B G, æquale sit quadrato rectæ A G.



Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrãmum AH, quadratum segmenti A G, cum omnia eius quatuor latera sint 34.*primi* æqualia; & rectangulum C G, comprehensum sub A B, & segmento B G, quod A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum

6. *secundi* A F, erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum F H, sit æqualis ipsi F A;) una cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B; quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, æquale quadratis

47. *primi* rectarum A E, A B: Quare rectangulum D H, vna cũ quadrato rectæ A E, æquale est quadratis rectarum A E, A B: Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Hoc theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos numeros diuiditur, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, ut demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus.

12.

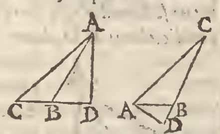
THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angu-

lum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub CB, B D, hoc est, quadratum lateris A C, æquale esse duobus quadratis laterum A B, B C, una cũ rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso. Cum enim recta C D, diuisa sit in B, vtcunque, erit quadratum rectæ C D, æquale duobus quadratis rectarũ C B, B D, & rectangulo cõprehenso bis sub CB, B D. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ A D, erunt duo quadrata rectarum CD, D A, æqualia tribus quadratis rectarũ CB, B D, D A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D: Est aũt quadratis rectarũ CD, D A, æquale quadratũ rectæ A C; Quare & quadratũ rectæ A C, æquale erit trib⁹ quadratis rectarũ CB, B D, D A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Cum igitur quadratis rectarum B D, D A, æquale sit quadratum rectæ A B; erit quadratum rectæ A C, æquale quadratis rectarum C B, B A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Quod est propositum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.



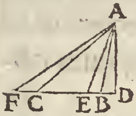
4 *secundi.*

47. *primi*

47. *primi*

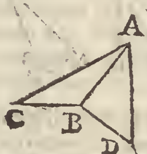
SCHOLION.

QVONIAM *aßumpsit Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latus C B, ad partes anguli obtusi, protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo A B C, angulus A B C, obtusus, & latus C B, ad partes B, protractũ; Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulũ in latus C B, protractum, cuiusmodi est recta A D. Si enim* *caderet intra triangulum, qualis eſt recta AE, eſſent duo anguli A B E, A E B, duobus rectis maiores cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus: Quod eſt contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis eſt recta A F, eſſent rurſus in triangulo* ABF, *duo anguli* A B F, A F B, *maiores duobus rectis, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt abſurdum.*



CONVERSVM *quoque huius theorematis ita oſtendemus. In triangulo* A B C, *quadratum lateris* A C, *maius ſit quadratis laterum* A B, BC; *Dico angulum* B, *quem dictum latus ſubtendit, eſſe obtuſum. Ducatur enim ex* B, *ad* A B *perpendicularis* B D, *lineæ* B C, *æqualis, iungaturq́; recta* A D.

47. primi *Quoniam igitur quadratũ ex* A D, *æquale eſt quadratis ex* A B, B D, *hoc eſt ex* A B, BC; *Ponitur autẽ quadratũ ex* A C, *maius quadratis ex* AB, BC: *Erit quadratũ ex* A D, *minus quadrato ex* A C, *& idcirco recta* A D, *minor quã recta* A C. *Itaque quia latera* AB, BC, *triãguli* ABC, *æqualia ſunt lateribus* AB, BD, *trianguli* ABD, *vtrumq; vtriq;,*

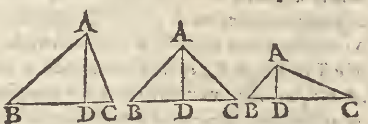


25. primi. *& baſis* A C, *maior eſt baſe* A D; *Erit angulus* ABC, *maior angulo* A B D: *ſed* A B D, *rectus eſt. Igitur* ABC, *recto maior, & obtuſus erit.*

13. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triãgulis, quadratũ a latere angulũ acutũ ſubtendente minus eſt quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulũ cõprehendentibus, rectangulo bis comprehẽſo, & ab uno laterum, quæ ſunt circa acutũ angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratũ lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus esse quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, una cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse duob⁹ quadratis laterũ A C, C B. Cum enim recta B C, diuisa sit in D, utcunque, erunt quadrata rectarũ B C, C D, æqualia rectangulo cõprehenso bis sub B C, C D, & quadrato rectæ B D. 7. secundi



Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectãgulo bis cõprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarũ B D, D A: Duobus autem quadratis rectarũ C D, D A, æquale est quadratum rectæ C A; Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cũ ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, æquale sit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & quadrato rectæ A B quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc est, quadratum lateris A C, minus esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo cõprehensõ bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat. 47. primi 47. primi

SCHOLION.

QVAMVIS *Euclides theorema hoc proponat de triãgulis dũtaxat oxygonijs, quæ scilicet oẽs angulos habẽt acutos; Idẽ tamen verum est in triangulis rectangulis & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangu-*

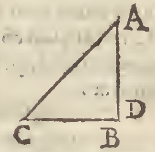
lis rectangulis, & amblygoniis perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso; in oxygoniis vero a quolibet.

Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint enim in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior

16. primi A B C, acutus, maior interno & opposito recto A E B, quod est absurdum. Si vero caderet extra in B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commmandinus, etiam si perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quæ latus A C, vt in rectangulis, vel extra triangulũ cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demõstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis nõ ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulũ rectangulũ ABC, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quæ eadẽ erit, quæ latus A B, propter angulũ rectũ B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulũ C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & sub linea C D, quæ interiicitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C.



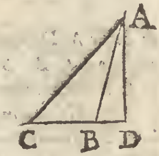
Cum enim

47. primi quadrata ex A B, C B, æqualia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D, Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, CB; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex

A C,

AC, CB, rectangulo bis sub C B, C D, Quod est propositum.

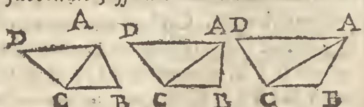
RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, & C D. Quoniam quadrata ex A D,
C D, æqualia sunt quadrato ex A C; ad- 47. primi
dito quadrato ex C B, cõmuni, erunt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadra-
tum ex C D, æquale est quadratis ex CB, 4. secundi
B D, & rectangulo bis sub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, CB, vna cũ quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B: Sunt au-



tem quadrata ex A D, B D, æqualia quadrato ex A B. Quare 47. primi
quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, vna cum rectangulo sub
C B, B D, æquale est rectangulum sub C D, C B; Ac pro- 3. secundi
pterea duplo quadrati ex ex C B, vna cum rectangulo bis sub C B, BD, æquale est rectangulum bis sub C D, C B. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.

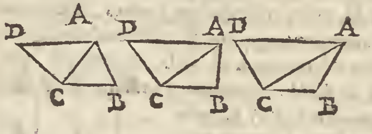
CONVERSVM quoque huius theorematis in quodam antiquo scholio demonstratur in hunc fere modum.

IN triangulo quocunque A B C, quadratum lateris A B, minus sit, quam quadrata laterum A C, C B. Dico angulũ C, quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad A C perpendicularis C D, lineæ C B, æqualis, iungaturque recta A D. Quoniam



igitur quadratum ex A D, æquale est quadratis ex A C CD 47. primi
hoc est, ex A C, C B; Ponitur autem quadratum ex AB, minus-

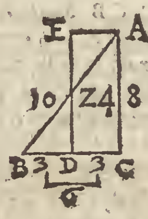
nus quadratis ex A C, C B; Erit quadratum ex A D, *maius quadrato ex* A B, *& ideo recta* AD, *maior quam recta* A B.



Itaque quia duo latera A C, C D, *triãguli* A C D, *æqualia sunt duobus lateribus* A C, C B, *trianguli* A C B, *vtrunque vtrique; & basis* A D, *maior base* A B: *Erit angulus* A C D, *maior angulo* A C B: *Sed* A C B, *rectus est, ex constructione: ergo* A C B, *recto minor, & acutus erit.*

25. primi

E x *his autem, quæ in proximis duobus theorematibus, & in 1. lib. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus. Sit primo triangulum rectangulũ*



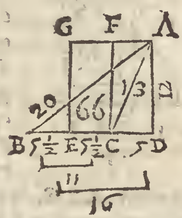
A B C, *cuius latera nota sint, nempe* A B, 10. *palmorum;* A C, 8. BC, 6. *Diuiso latere* B C, *bifariam in* D, *vt sit* C D, 3. *palmorum, perficiatur rectangulum* A C D E, *quod æquale est triangulo* A B C, *vt in scholio propos.* 41. *lib.* 1. *ostendimus. Quia vero ex ductu* C D, *trium palmorum in* C A, 8. *palmorum producitur area rectanguli* C E, 24. *palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum* A B C, *rectangulo* C E, *æquale. Quod est propositum.*

S i t *secundo triangulum obtusangulum* A B C, *cuius latera sint cognita;* A B, 20. *palmorum;* A C, 13. B C, 11. *Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineæ* A D, *hoc modo. Quoniam quadratum lateris* A B, *maius est, quam quadrata laterum* A C, B C, *rectangulo bis comprehenso sub* B C, C D; *si quadrata laterum* A C, BC, *nempe* 169. 121. *quæ efficiunt* 290. *detrahantur ex* 400. *quadrato lateris* A B, *remanebunt* 110. *pro rectangulo bis comprehenso sub* B C, C D, *cuius numeri dimidium* 55. *dabit rectangulum sub* B C, C D. *Si igitur* 55. *rectangulum sub* B C, C D, *diuidatur per* 11. *latus notum* B C, *exibit reliquum latus* C D, 5. *palmorum, vt Ioan. Regiom. demon-*

12. secundi

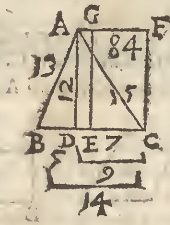
strat

ſtrat propoſ. 17. lib. 1. de triangulis. *Quia vero quadrata laterum* A D, C D, *æqualia ſunt quadrato lateris* A C; *ſi quadratum* 25. *palmorum, nempe lateris* C D, 5. *palmorum nuper inuenti, auferatur ex* 169. *quadrato lateris* A C, 47. primi
remanebunt 144. *palmi pro quadrato lateris* A D. *Quare latus* A D, *erit* 12. *palmorum, cum radix quadrata huius numeri* 144 *ſit* 12. *Itaque diuiſo latere* B C, *biſariam in* E, *educantur ex* C, E, *ad* B D, *perpendiculares* C F, E G, *occurrentes rectæ* A G, *quæ per* A, *ipſi* B D, *parallela ducitur, in punctis* F, G. *Quibus peractis, ſi* E C, *palmorum quinque cum dimidio, ducatur in* C F, 12. *palmorum.* (*Eſt*



enim C F, *ipſi* A D, *æqualis,*) *exurget area rectanguli* CG, 66. *palmorum, quod cum æquale ſit triangulo* A B C, *ex ſcholio propoſ.* 41. *lib.* 1. (*ſunt enim rectangulum* C G, & *triangulum* A B C, *in eiſdem parallelis*) *Erit quoque area trianguli* A B C, *palmorum quadratorum* 66. *quod eſt propoſitum.* 34. primi

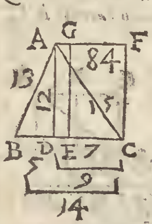
S I T *poſtremo triangulum acutangulum* A B C, *latera habens nota;* A B, 13. *palmorum;* A C, 15. B C, 14. *Primũ igitur hic quoque reperienda eſt quantitas perpendicularis* A D, *hac ratione: Quoniam quadratum lateris* A B, *minus eſt, quam quadrata laterum* A C, B C, *rectangulo comprehenſo bis ſub* B C, C D; *ſi quadratum lateris* A B, *nimirum* 169. *detrahatur ex quadratis laterum* A C, B C *hoc eſt, ex* 225. 169. *quæ efficiunt* 421. *remanebunt* 252. *pro rectangulo cõprehenſo bis ſub* B C, C D, *cuius numeri dimidium* 126. *dabit rectangulum ſub* B C, C D *Si igitur* 126. *rectangulum ſub* B C, C D, *diuidatur per* B C, *latus* 13. ſecundi



notum, ut per 14; *exibit reliquum eius latus* C D, *palmorum* 9. *ut conſtat ex* Ioan. Regiom. *lib.* 1. *de triangulis propoſ.* 17. *Quoniam autẽ quadrata ex* A D, C D, *æqualia ſunt quadrato ex* A C; *ſi quadratum* 81. *palmorum, nempe lateris* C D, 47. primi

9. pal-

9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato; lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12; erit latus A D, 12. palmorum. Itaque diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipsi B C, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si C E, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; (est enim EG, recta ipsi A D, æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84. Quod cum triangulo A B C, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1 (sunt enim rectangulum E F, & triangulum ABC in eisdem parallelis) erit quoque area trianguli A B C, 84. palmorum. Quod est propositum.

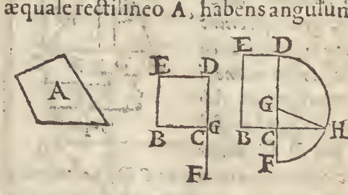


ITAQVE in uniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, ceu in exemplis datis est manifestum.

14. ## PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo, æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale con-
45. primi stituendum est. Constituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, ut D C, producatur ad F, sitque C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidaturque D F, bifariã in puncto G, quod cadet aut in punctũ C, aut nõ. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangu-



34. primi lum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, æqualia sint

sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si uero punctum G, nō cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, uel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse equale rectilineo A. Ducatur enim recta G H. Itaq; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectāgulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

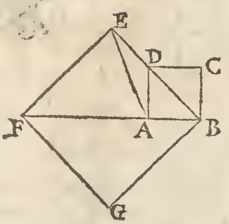
5. secundi

47. primi

SCHOLION.

QVONIAM in secundo hoc libro Euclides de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inseri hic poterit sequens problema de quadrato nō iniucundum, ad hunc modum.

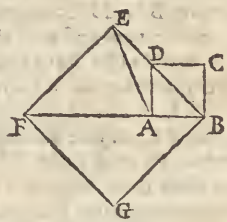
DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.



EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B. inueniendumque sit latus illius quadrati. Ex recta A B, *describatur quadratum* A C, *cuius diameter ducta* BD, *producatur ad E, ut sit D E, recta rectæ* A D, *equalis. Dico rectam B E, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus* BE, *excessu dato* AB.

Ducatur

32. primi D icatur enim EF, perpendicularis ad B E, quæ rectam BA, pr ductam secet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angu'us F E B, rectus est, & EBF, semirectus; erit & B F E, semirectus. Quare recta B E,



6. primi F E, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi BE; & ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G; constitutum erit quadratū rectæ BE. Quod si ducatur recta A E, erunt anguli A E D, E A D, æqualibus lineis D E, D A, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebunt anguli A E F, E A F, æquales, ideoque rectæ E F, A F. æquales erunt. Quoniam vero diameter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadē diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B; quod est propositum.

5. primi

6 primi

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

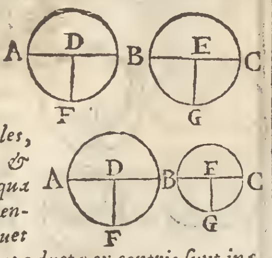
EVCLIDIS ELEMENTVM III.

DEFINITIONES.

I.

AEQVALES circuli sunt, quorũ diametri sunt æquales; uel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

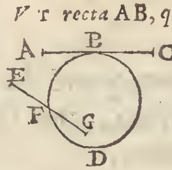
QVONIAM Euclides in hoc 3. lib. uarias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens futurus est usus in hoc lib. Primo itaque docet eos circulos esse æquales, quorum diametri, uel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterũ extremũ fixum, & immobile, ceu in 1. lib. diximus, perspicuũ est eos circulos esse æquales, quorũ semidiametri, seu rectæ ex cẽtris ductæ, sũt æquales; uel etiã quorũ totæ diametri æquales sunt. Vt si diametri AB, BC, uel rectæ DF, EG, e centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli A F B, & BGC. *Sic etiam si circuli sint æquales, erunt diametri, uel rectæ e centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, uel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales;*



quales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem, &c.

II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

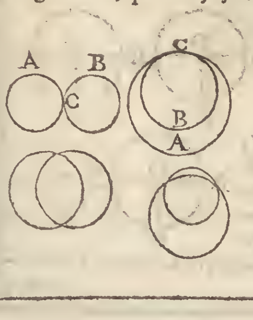


VT recta AB, *quia ita circulum BFD, tangit in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicitur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatque intra ipsum, non dicitur circulum tangere, sed secare.*

III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

EODEM modo duo circuli A C, B C, *se mutuo dicuntur tangere in C, quia ita se se contingunt in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.*

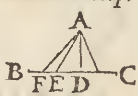


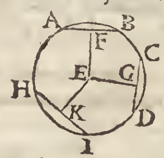
IIII.

IIII.

IN circulo æqualiter diſtare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autem abeſſe illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

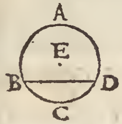
QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuiſſima eſt perpendicularis, & ſemper eadem; aliæ vero infinitis modis variari poſſunt; recte diſtantia illius puncti a linea accipitur penes lineam perpendicularem. Vt diſtantia puncti A, a recta B C, dicitur eſſe perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis eſt; quia A D, omnibus eſt breuior, quod angulus A E D, vel A F D, minor ſit angulo recto A D E. 19.primi. *Immo non ſolum A E, A F, maiores ſunt quam A D, ſed etiam ipſæ inter ſe inæquales ſunt. Eſt enim A F, maior, quam A E, cum angulus A E F, ſit obtuſus, Et A F E, acutus, & ſic de aliis lineis non perpendicularibus.* 19.primi. *Hinc factum eſt, vt Euclides æqualem diſtantiam rectarum in circulo ab ipſius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem diſtantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur diſtare a centro E, ſi perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abeſſe dicetur a centro E, quam linea H I, ſi perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.*





V.

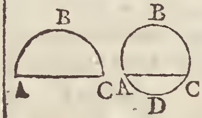
SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



Vt si ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunq; dicetur tam figura A B D, contenta circunferentia B A D, & recta B D; quam B C D, comprehensa recta B D, & circunferentia B C D, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta B D, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum B A D; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmẽtum B C D. Vocatur a plerisq; Geometris recta BD, chorda, & circunferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autẽ angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



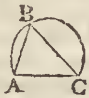
Definit iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur; Primo angulum segmenti, dicens, angulum mixtũ B A C, vel B C A, contentum sub recta linea A C, & circunferentiã A B C, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si deniq; segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quod-

quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

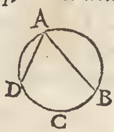
Sit segmentum circuli quodcunq; A B C, cuius basis recta A C: Ex suscepto quolibet puncto B, in circunferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, rectæ lineæ B A, B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur existere in segmento A B C.

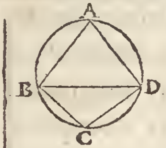


VIII.

CVM vero comprehendentes angulũ rectæ lineæ aliquam assumũt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

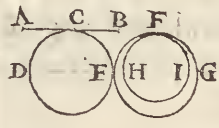
Ex puncto A, quolibet suscepto in circunferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circunferentiæ B C D, cuiusque, quam quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaq; rectilineus BAD, insistere dicitur circunferentiæ BCD. Perspicuum autem est, hunc angulum a præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac vero insistere circunferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circunferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circunferentiæ, circunferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur





ſegmentum aliquod circuli BCD, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc ſegmento exiſtens, & eius circunferentiæ inſiſtens. Angulus enim in eo exiſtens, erit B C D; at eius circunferentiæ C B D, inſiſtens, erit B A D, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati ſunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in ſegmento, & angulus circunferentiæ cuipiam inſiſtens, ad diuerſos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propoſ. lib. 6. quæ ſolum conuenire poteſt circunferentijs circulorum, quibus anguli inſiſtunt, non autem, in quibus exiſtunt, vt eo in loco oſtendemus. Idem quoq; facile conſtat ex verbo græco βεβηκέναι, quod aſcendiſſe ſignificat. Aſcendit enim angulus D A B, ſupra circunferentiam C B D.

PRAETER *tres dictos angulos cõſideratur etiam a Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circunferentia circuli; vel certe duabus circunferentijs ſe mutuo tãgentibus, ſiue hoc exterius fiat, ſiue interiꝰ.*



Exemplum. Si recta A B, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus A C D, vel C B E. dicetur angulus contingentiæ, ſiue contactus: Rurſus, ſi circulus C E D, tangat circulum EFG, exterius in E: Item circulus H F I, circulum E F G, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus C E F, quã EFH, vel G F I, angulus contactus, ſeu contingentiæ. Sunt itaq; vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.

I X.

SECTOR autem circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & a peri-

pheria

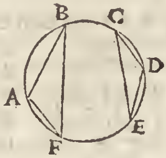
pheria ab illis assumpta.

Si in circulo A B C D, *cuius centrum* E, *rectæ* A E, C E, *constituant angulum* A E C, *ad centrum* E; *nominabitur figura* A E C D, *contenta rectis* A E, E C, *& circunferentia* A D C, *quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione* 8. *explicatur, referri ad circunferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circunferentiam* A D C, *quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis* A E, C E, *assumptæ: Ita quoq; in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circunferentiam constituti; quandoquidem in vtraq; definitione vsus est eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.*

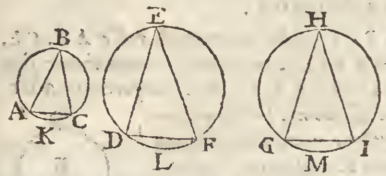
X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

Segmenta, *seu circunferentiæ* A B D F, D C A F, *quæ capiunt hos duos angulos* A B F, D C E, *æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta* 7. *definitionem, similes dicuntur.*



Eodem *modo segmenta diuersorũ circulorum tam æqualium, quam inæqualium a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si anguli* A B C, D E F, G H I, *fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circunferentiæ* A B C, D E F, G H I, *quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc*

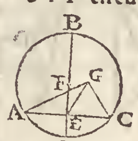


segmentorũ, circunferentiarũue similitudo in eo, quod qualis pars est vna circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque sit altera circunferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circunferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars est circunferentia A B C, totius circunferentiæ A B C A, talis & tanta quoque pars sit circunferentia D E F, totius circunferentiæ D E F D; Item talis, & tanta circunferentia G H I, totius circunferentiæ G H I G. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circunferentiæ similes, ad totas circunferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib.6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circunferentiasue, appellari similes.

1. ## PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.

SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, quę bifariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta B D, aliud punctum, pręter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, a quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & basis A G, basi C G; (a



centro

centro enim ducuntur) erunt anguli A E G, C E G, æquales, ideoq; recti: Erat autem & angulus A E F, rectus ex constructione; Igitur recti A E F, A E G, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum. 8. primi.

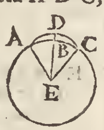
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

THEOR. 1. PROPOS. 2. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

In circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circunferentia: Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea A D C, recta. Inuento igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta A D C, 1. tertij. lineæ rectæ E A, E C, E D, secetq; E D, circunferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, æqualia sunt, (e centro enim ducuntur) erunt anguli E A D, E C D; 5. primi. æquales: Est autem angulus E D A, angulo E C D, 16. primi. maior, externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur

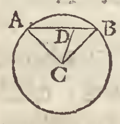


 &an-

& angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo opposita, hoc est, recta
19. *primi.* E B, sibi æqualis, maior erit, quam recta E D, pars quam totum, Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C non posse cadere super arcum A B C, ita vt eadem sit, quę circunferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum A B C, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaq; si in circuli peripheria duo quęlibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Idem hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, *coniungat duo puncta* A, *&* B, *in circunferentia circuli* A B, *cuius centrũ C Dico rectã* A B, *intra circulũ cadere, ita vt omnia eius pũcta media intra circulũ existãt. Assumatur.n. quodcunq; eius punctũ intermediũ* D, *& ex centro educãtur recta C* A, *C* B, *C* D.



Quoniam igitur duo latera C A, *C* B, *trianguli C* A B, *æqua-*
5. *primi.* *lia sunt, erunt anguli C* A B, *C* B A, *æquales: Est autem an-*
16. *primi.* *gulus C D* A, *angulo C* B A, *maior, externus interno; Igi-*
tur idem angulus C D A, *angulo C* A D, *maior erit, & ob*
19. *primi.* *id latus C* A, *latere C* D, *maius erit. Quare cum C* A, *sit ducta a centro ad circunferentiam vsque, non perueniet recta C D, ad circunferentiam, ideoq; punctum D, intra circulum cadet: Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta* A B, *intra circulũ cadit; quod est propositũ.*

COROLLARIVM.

Hinc est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tãgit, ita vt eum non secet, in vno tãtum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum; Quare circulum secaret, quod est cõtra hypothesin.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 3. | 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoq; eam secabit.

PER A, centrum circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus lateribus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales; Igitur anguli AFB, AFD, æquales erũt, hoc est recti. Quod erat primo propositũ. *8.primi.*

SIT iam AF, ad angulos rectos ipsi BD; dico rectam BD, bifariam secari in F. a recta CE. Ductis .n. iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF, & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoq; erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrũ extensa, &c. Quod demonstrandum erat. *5.primi.* *26.primi.*

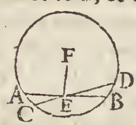
FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectę AB, æquale quadratis rectarum AF, FB, quam quadratũ rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratũ rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectę AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atq; idcirco rectæ FB, FD, æquales erunt. *47. primi.*

THEOR.

4. THEOR. 3. PROPOS. 4.

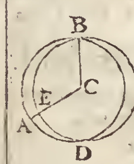
SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent non per centrum extenſæ; ſeſe mutuo bifariam non ſecabunt.

DVAE rectæ A B, C D, ſe mutuo in E, ſecent in circulo A C B D, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum aliquando bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diuiſa enim ſit & A B, & C D, ſi fieri poteſt, bifariam in E. Inuento (1. tertij.) igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur ſecare rectam A B, bifariam in E, ſecabit (3. tertij.) ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectę lineæ ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.



5. THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli ſeſe mutuo ſecent; non erit illorum idem centrum.

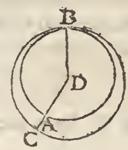


CIRCVLI A B D, E B D, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idẽ centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque C, a quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad ſectionem B; C A, vero ſecans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli

culi E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6. 6.

SI duo circuli sese mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



Dvo circuli A B, B C, se interius tangant in B; Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, a quo duæ rectę ducantur; DB, quidem ad tactum B; At D C, secans vtramq; circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, ęqualis. Quare rectæ A D, & C D, inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Evclides proposuit theorema hoc de circulis sese interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius sese tangentium, cum vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.

THEOR. 6. PROPOS. 7. 7

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea,

in qua

in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrũ ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodẽ puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ.

In diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G cadant in circulum quotcunque lineæ F C, F D, F E; Dico omnium, quę ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam eſſe G A, in qua eſt centrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit; Deinde rectam G C, quæ centro propinquior eſt, maiorem recta G D, quę a centro plus diſtat, & eadem ratione G D, maiorem recta G E; Denique ex G, ad vtraſq; partes minimæ lineæ G B, duci poſſe tantummodo duas lineas inter ſe æquales. Ducantur e centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ F C, F D, F E. Quoniã

20. primi. igitur duo latera G F, F C trianguli G F C, maiora ſunt latere G C; Sunt autem rectę G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc eſt, rectæ G A; erit & G A, maior quam G C; Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maxima eſt omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

20. primi. Deinde, quoniam in triangulo E F G, latus E F, minus eſt duobus lateribus F G, G E; Eſt autem F E, ipſi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E, Dempta ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quam G E; Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt.

Rursus, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia ſunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior eſt angulo G F D; erit baſis G C, maior baſe G D; Eadem ratione maior erit G C, quam G E; Item maior erit G D, quam G E. Quare linea

24 primi.

propin-

propinquior centro maior eſt ea, quæ remotior.

FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H, ita vt G E, G H, æqualiter diſtent a centro. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia ſunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipſius lineæ minimæ G B, æquales inter ſe. Quod autem nulla alia his duabus poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum H, erit ea, cum ſit centro propinquior, maior quam G H; ſi vero cadat infra H, erit ea, cum ſit remotior a centro, minor quam G H, vt oſtenſum fuit. Duæ igitur ſolum rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ G B, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat demonſtrandum. *4 primi.*

SCHOLION.

HANC *propoſitionem nonnulli conuertunt, hoc modo.*

SI intra circulum pūctum ſumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima ſit, vna vero minima; & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquiores, æquales autē ab eo æqualiter diſtabūt.

IN *circulo A B C, punctum ſumatur D, a quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima ſit D A, minima vero D C; ipſarum vero D E, D F, maior ſit D E, denique D E, D B, ſint æquales. Dico D A, per centrum tranſire, & D C, reliquam partem eſſe diametri, hoc eſt,*

D C,

D C, ipsi D A, esse in directum. Item D E, propinquiorem esse centro, quam D F. Denique D E, D B, æqualiter a centro abesse. Primum enim si D A, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, erit ea omnium ex
7. tertij. *D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum D A, maxima ponatur. Transit ergo D A, per centrum.*

DEINDE, *si D C, non est in directum ipsi D A; protracta A D, in directū, erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius A D, protractæ, omnium minima; Quod est absurdum; cū DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri.*

RVRSVS, *si DE, non est vicinior cētro, quā DF; aut æqualiter distabūt ab eo, aut D E, longius ab eo abest: Si æqualiter*
7. tertij. *distant, ipsæ erunt æquales; quod est absurdum, ponitur enim D E, maior. Quod si D F, dicatur esse propinquior centro, ipsa*
7. tertij. *erit maior, quam D E. Quod magis est absurdum.*

POSTREMO, *si DE, DB, non æqualiter distant a cen-*
7. tertij. *tro, erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B.*

8.

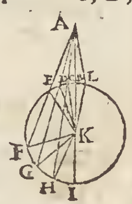
THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: In conuexam vero peripheriam cadētium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & dia-

metrum

metrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ.

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum tranſeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunq; . Dico omnium eſſe maximam A I, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ centro propinquior exiſtit, maiorem recta A G, quæ remotior eſt a centro; Et eadem ratione A G, maiorem quam A F. Econtrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe. Deinde rectam A C, quæ vicinior eſt minimæ A B, minorem eſſe recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipſam A D, maiorem, quam A E. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ A B, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, maiora ſunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H æquales rectis A K, K I, hoc eſt, rectæ A I; erit & A I, maior, quam A H: Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quã A F. Quare A I, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima. 20. primi.



DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H, æqualia ſunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior eſt angulo A K G; erit baſis A H, baſe A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F; Item A G, maior, quam A F. Quare linea centro propinquior maior eſt linea remotiore. 24. primi.

RVRSVS, q̃a in triãgulo A C K, recta A K, minor eſt duabus A C, C K; ſi auferantur ęquales B K, C K, remanebit 20. primi.

adhuc

adhuc A B, minor, quam A C. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

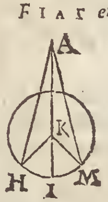
RVRSVS, cum intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K, erunt A C,
21. primi. C K, minores, quam A D, D K; Sublatis igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E; Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor est, quam remotior ab eadem.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia sunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, dictis
4. primi. lateribus contenti æquales; erunt rectæ A C, A L, ex vtraq; parte minime A B, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior a minima, maior quam A L; Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam A L, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectę lineæ æquales ad vtrasq; partes minimæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasq; partes maximæ A I.

FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturq; recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia sunt lateribus A K, K M; sunt autem & anguli A K H, A K M, æqua-



4. primi. *les: erunt bases A H, A M, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H, ea vel maior erit, vel minor, quam A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.*

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales: Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

8. *primi*

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circunferentiam cadunt rectæ A D, A C; erit recta A D, quæ propinquior est centro E, maior, quam recta A C, remotior a centro, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.

7. *tertij*

10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulũ A G B D H E, in pluribus, quã duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis A B, B D: quibus bifariam diuisis in I, & K, educantur ex I, & K, ad A B, & B D, perpendiculares I L, K L. Quoniam igitur rectæ I L, K L, secant rectas A B, B D, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraq; ex corollario propos. 1. huius lib. per centrũ ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrũ dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli A B C D E F. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum. quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

5. tertij.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, & B, & D. Inuentum autem sit I, centrũ circuli A G B D H E, a quo ad dicta tria puncta ducantur I A, I B, I D. quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniã igitur intra circulũ A B C D E F, assumptũ est punctũ I, a quo cadunt in circunferẽtiã plures, quã duæ rectę æquales, erit I, centrũ circuli A B C D E F. Erat autem idem punctum I, centrum circuli A G B D H E; Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum; quod est absurdum.

1. tertij.

9. tertij.

5. tertij.

11. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta,

cta, in contactum circulorum cadet.

Tangat circulus A B C, circulum A D E, intus in A, & sit F, centrũ circuli A B C, & G, centrũ circuli A D E. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in cõtactum A. Si enim non cadit, secet utrumq; circulũ in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ du[cantur] A F, A G. Quoniam igitur in triã[n]gulo A F G duo latera G F, F A, maiora sunt latere G A; Est autem G A, recta rectæ G D, æqualis; (quod G, positum sit centrũ circuli A D E) Erunt & G F, F A, 20. primi

rectæ maiores recta G D. Dempta igitur communi G F, remanebit F A, maior, quam F D: Quare cum F A, æqualis sit ipsi F B; (quod F, positũ fuerit centrũ circuli A B C) erit & F B, maior, quã F D, pars toto, quod est absurdũ. Quod si quis velit cõtendere F, esse centrũ circuli A D E; & G, centrũ circuli A B C, instituetur argumẽtatio hac ratione. In triãgulo A F G, duo latera F G, G A, maiora sunt latere F A; Est 20. primi autẽ recta F A, rectæ F E, æqualis: (cum F, ponatur centrũ circuli A D E.) Igitur rectę F G, G A, maiores sunt recta F E; dempta ergo cõmuni F G, remanebit G A, maior, quã G E: Quia igitur G A, æqualis est ipsi G C; (propterea quod G, ponatur esse centrũ circuli A B C,) erit quoque G C maior, quã G E, pars toto. quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrũ maioris circuli extra minorẽ ponatur. Nõ ergo recta F G, extensa vtrumq; circulum secabit sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

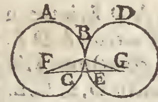
THEOR. 11. PROPOS. 12. 11.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

Circuli A B C, D B E tangãt se exterius in B, & centrũ circuli A B C, sit F; circuli uero D B E, centrũ sit G; Dico rectã extensam per F, & G, trãsire per contactũ B. Si enim non

 transit,

transit, secet circunferentias in C, & E; ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniā igi

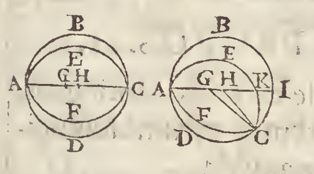


20. primi tur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, maiora sunt latere F G: Est autē recta B F, rectæ F C, æqualis; (quod F, sit centrū circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, sit centrum circuli D B E) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quā totū, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E;) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

12. THEOR. 12. PROPOS. 13.

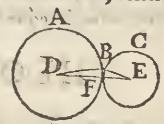
CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, siue intus, siue extra tangat.

CIRCVLI A B C D, A E C F, tangant se intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C. Assumantur igitur centra horum circulorum G, H, per quæ recta G H, in utramque partem extendatur, quam necesse est cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, &
11. tertij recta A C, diameter, diuidetur A C, bifariam in G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H quod est absurdum. Vna enim recta in uno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si enim G C, est dimidium totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C. Quod si quis dicat rectā G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At uero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare utrumque circulum in I, & K, ut in secunda figura perspicuum est: ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrū circuli



circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K; (quod H C, H K, sint ex centro) & recta G C, rectæ G I; (quod & hæ sint ex centro) erit quoque recta G K, maior, quam G I, pars toto: quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum utraque ducta sit ex centro H;) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A; Quare dempta communi H G erit G C, maior, quam G A, quod est absurdum, cum utraque ex centro G, ducatur: Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno. — 20. primi; 20. primi

TANGANT se iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quam uno, prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B; Ductis igitur rectis DB, E B, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc est ipsi D E. Sunt autem & maiores; quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno. — 12 tertij; 20. primi



ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra unũ circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra aliũ, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

SI recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probauit, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam uno uidetur ea potissimum concludere, circulum nõ posse tangi a circulo in duobus, uel pluribus punctis, quæ longo interuallo a se dissideant; nõ autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem

 argumen-

argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, ostendemus breuiter, in vno eodemque contactu non poße esse plura puncta, quam unum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, recta ducatur E F, quæ ad contactum

11. tertij *perueniet necessario, vt ad punctū A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si enim se tangant in alio puncto, vt in B; ductis ex B ad centra E, & F, rectis*

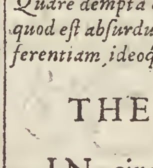
20. primi *B E, B F, erunt rectæ E F, F B, maiores recta E B; Est autem recta EB, æqualis rectæ E A, cum vtraq; sit e centro E: Igitur & rectæ E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quā F A, quod est absurdum, cum F B, F A, cadant e centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales existant.*

13.
THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distāt a centro, æquales sunt inter se.

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D; Dico ipsas æqualiter distare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, C D, duæ perpendiculares EF, EG, & coniugantur rectæ E A, E D; Secabuntque

3. tertij. rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariā. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter se sunt æqualia:



47. primi Quadratum autem rectæ E A æquale est quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarū A F, F E, æqualia quadratis rectarū D G, G E. Ablatis ergo quadratis æquali-

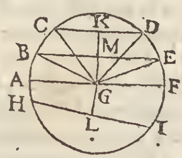
æqualibus æqualiũ rectarũ A F, D G, remanebunt quadrata rectarũ F E, G E, æqualia, ideoque & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E.

RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter a centro E; Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterũ ex cẽtro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; diuidentq; rectas AB, CD, bifariã. Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earũ quadrata æqualia: Est autem quadratũ rectæ E A, æquale quadratis rectarũ A F, F E; & quadratũ rectæ E D, æquale quadratis rectarũ D G, G E. Quare & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoq; ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoque erũt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum. 3. tertij. 47. primi

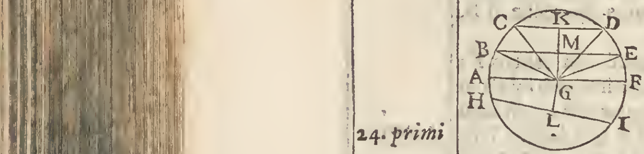
THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

IN circulo maxima quidẽ linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrũ G, diameter sit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium esse maximam A F; & H I, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad C D, H I. Et quia remotior est C D, a cẽtro, quã H I, erit GK, maior quã G L, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex G K, recta G M, ipsi G L, æqualis, atq; per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & cõnectantur rectæ GB, GC, G D, G E. Quoniam igitur rectæ



perpendiculares G M, G L, æquales sunt, æqualiter distabũt rectæ B E, H I, a centro, per 4 defin. huius lib. & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ G B, G E, maiores 14. tertij 20. primi quidem sunt recta B E; æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E; Eadem ratione ostendetur A F, maior omnibus alijs lineis Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia sunt lateribus G C, G D, triãguli C G D; & angulus B G E, maior est angulo C G D; erit recta



24. primi B E, maior quam C D; atque adeo H I, quæ æqualis ostensa fuit ipsi B E, maior quoque erit quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandũ.

SCHOLION.

Eodem fere modo demonstrabitur theorema, si ab uno, eodemque puncto circunferentiæ plurimæ lineæ cadant.

Cadant enim a puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, transeat. Dico A D, esse omnium maximam, & A C, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis B E, C E, cum in

20. primi *triangulo A E C, latera A E, E C, maiora sint latere A C; sintque rectæ A E, E C, æquales rectis A E, E D, hoc est, rectæ A D; maior erit A D, quam A C; Eademque ratione maior erit, quam A B; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est A D.*

Deinde, quia duo latera A E E C, trianguli A E C; æqualia sunt duobus lateribus A E, E B trianguli A E B; &
24. primi *angulus A E C, totus, maior est angulo A E B; erit basis A C, maior base A B; Eodemque argumento erit A C, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est.*

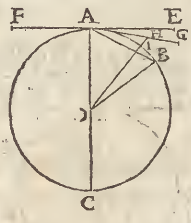
Caeterum & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt a puncto A, ad vtrasque partes maximæ A D. Si namque angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturque recta A F; cum latera A E, E C, æqualia sint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoque A E C, A E F, æquales;
4. primi *Erunt bases A C, A F, æquales, Neque vero vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi; Quæcunque enim ducatur ex A, supra A C, ea minor erit quam A C; si vero infra A C, ea*

ta maior erit, vt iam demonstratum est.

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

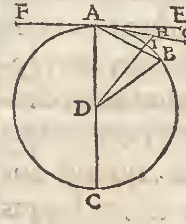
QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularẽ necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A B; ducta D B, erunt duo anguli D A B, DBA, æquales; sed D AB, rectus est, per constructionem: igitur & D B A, rectus erit, *5. primi* quod est absurdum; Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. *17. primi* Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; nec eandẽ ob causam in ipsam circunferentiã, sed extra, qualis est E F. Dico iam inter A E, rectam, & circunferentiã A B, non posse cadere alteram rectã. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, secans circunferentiam in I.



Quoniam igitur in triangulo D A H, duo anguli D H A, D A H, minores *17. primi* sunt duobus rectis; & D H A, rectus est, per constructionem, erit angulus D A H, recto minor, ideoque recta D A, hoc est, recta illi æqualis D I, maior erit quam D H, pars *19. primi* quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circunferentiam A B: sed quæcunque ex A,du-

A, ducatur infra A E, ea secabit circulũ. Dico deniq; angulũ semicirculi, contentũ diametro A C, & circunferẽtia A B, maiorẽ esse omni acuto angulo rectilineo; reliquũ uero angulũ cõtingentiæ, qui cõtinetur recta A E, & circunferentia A B, minorẽ esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniã ostensũ est, omnẽ rectã ex A, ductã infra perpendicularẽ A E, cadere intra circulũ, faciet necessario ea cum A C, minorẽ angulũ angulo semicirculi, at uero cũ A E, maiorẽ angulo cõtingentiæ, cũ ille sit pars anguli semicirculi, hic uero totum quidpiam ad angulũ contingentiæ. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

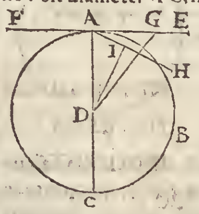


COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod recta a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta, ipsum circulum tangit. Ostensum enim fuit, ipsam cadere extra circulum; Quare solum in puncto illo diametri extremo ipsum attingit.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo ABC, cuius centrũ D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quã dico extra circulũ cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniã igitur in triãgulo ADG, duo



17. *primi* anguli DAG, DGA, minores sunt duobus rectis, & DAG, factus est rectus; erit DGA, recto minor. Quare maior erit recta D G,

19. *primi* quã D A; ideoq; punctũ G, extra circulũ erit. Eademq; est ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quã dico necessario secare circulũ. Fiat.n. angulus ADI, æqualis angulo EAH Addito igitur cõmuni angulo DAH, erũt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoq; minores

11. *pron.* duobus rectis; quare coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, ut in I. Dico igitur punctũ I, esse intra circulũ. Quoniã tres anguli in triã-

gulo

gulo D A I, æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, ostẽsi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atq; adeo maior, quam D A I, acutus. Quare recta DA, maior est quam D I. Non igitur D I, ad circunferentiã perueniet; proptereaq; punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta A H, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, ut prius. 32. primi 19. primi

SCHOLION.

EXISTIMAT *Peletarius, angulũ contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circũ ferentiæ, non effici angulum ullum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quã ipse hoc in loco adducit. Sic igitur inquit :*

CVM *huius theorematis caput postremũ attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriã nõ satis sibi constare ; immo adeo, repugnantiã in se admittere.*

PRIMVM *enim extra intelligentiã est, ut inter quãtitates minima dari possit ; qualẽ hoc loco angulũ, quẽ dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorẽ omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, ut maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundũ eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam cõtinuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cæpi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, ut apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.*

SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quã dimidiũ, idq; continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

VERBI *causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, & BCD, angul⁹ (si modo sit angul⁹) cõtactus: Vult prima decimi, si auferatũ ab angulo A, maius, q̃ dimidium, ac rursus a reliqua parte*

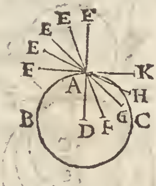
parte maius, quam dimidium; sicque continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam B C D. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria

propositio est, quæ (ut sic dicam) magis naturaliter uera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non uidet propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, ut quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, ut binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc uentum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstranda, aliisque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus; ut dicamus lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes

angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbe, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sane ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumque facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtusior fiet H E A, inde vero acutior B E H; sicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cũ ea. Tum enim immersa, vt sic dicam linea C D, in lineam A B, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo

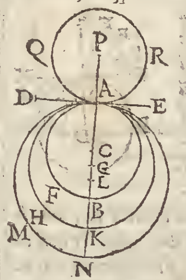
culo A B C A, cuius centrum D, linea D E, præteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circunducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli cõtinuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea E D, facta sit E K, & tangat circulum A c tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantũ ad angulum attinet: non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantque spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non cõsistat, quam vno; fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo; quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum: Fortasse dices, punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumque A, peripheriæ in suo rotundo; neque vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus omnique puncto refugit; vt contraria contraposita, fiant manifestiora: Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; ut nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet: Illud tamen minime urgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per theoremata.



Contactvs duorum circulorum interior, quantitas non est.

Sit enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter vero A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæ sextæ, lineam D E, contingere ipsum A F B A, circulum: ac propterea

rea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsextæ. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro A B, cētrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus AHK A. Dico F A H, non esse quātitatem. Constat quippe circulum A H K A, transire inter rectam D A, & curuam A F, cum sit semidiameter G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E, tangere ipsum A H K A, circulum ex eodem huiusce decimæsextæ consectario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem consectario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic, omnes æquales, si modo æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis cōtactui D A F. Fietq; ut M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat cōtactum D A M. Igitur M A F, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.



Sed & probabimus contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes: Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

Contactvs lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

Manente enim eadem constructione, si D A F, sit quantitas

quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neque per obliquam, vt per lineam A M: Esset enim F A M, pars ipsius D A F: Atqui F A M, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur F A M, pars ipsius D A F. Igitur D A F, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non sit quãtitas, per primam harum; neque per rectam, cum neq; D A F, sit quantitas, per secundam earundem; neq; D A Q quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in posteriori figura, angulus B A F, æqualis est angulo B A D; cum ipsi nihil accrescat ob contactum D A F, qui quãtitas nõ est: & ob id Q A P, rectus est, & æqualis ipsi D A P, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

HAEC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quã ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.

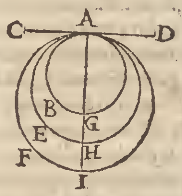
SINT

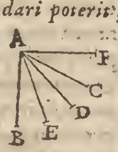
Sint enim super centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G. & secet E G, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, esse æquales.. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neque enim contra, C B D, maior vllo pacto erit ipso F E D) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione ullus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim auguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

His ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorē, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus B F N B, tanto interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro æquali ipsi A E; qui circulus tangat F C D B, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, æqualem esse angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum: Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D æqualis. Igitur C B F, contactus, nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

Haec igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, qua omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, disset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt a nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem; Immo vero asseueramus, quemuis angulũ contactus, & si ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus C A B, si per A, describatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod si adhuc maior circulus A F I, describatur, erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque: Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus B A C, minor est recto B A F; & tamen si ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D: Quod si alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.





PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posſe infinite, ita vt quouis angulo contactus propoſito, dentur alij maiores ſine numero. Vt in ſuperiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior eſt angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, ſi minores ſemper circuli, quam A B G, deſcribantur, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; ſemper tamen minor exiſtet quouis rectilineo acuto. Quemadmodũ quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior eſt acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod ſi alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiuſmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui ſit æqualis angulo recto, vel maior recto, niſi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtuſum, ſed ſemper recto, uel obtuſo minor eſt angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis ſit acuto angulo rectilineo propoſito, vel maior acuto niſi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur a duabus lineis ſe ſecantibus; cuiuſmodi eſt angulus ſegmenti.) ſed angulus contactus acuto ſemper minor eſt.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum ſemicirculi maximam quantitatem. Immo aſſerimus, quolibet angulo ſemicirculi propoſito, quamuis oſtenſus ſit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari poſſe maiores. Vt in eadem figura ſuperiori circulari, angulo ſemicirculi B A G, maior eſt angulus ſemicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus ſemicirculi F A I: Atque ita deinceps, ſi maiores ſemper circuli deſcribantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus ſemicirculi, ſemper tamen minor exiſtet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo ſemicirculi F A I, minor eſt angulus ſemicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus ſemicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior eſt, quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonſtrauit: quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, ceu ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiuscemodi inter se æquales; Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa; Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum: Quare si uel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere; vt ex 2. propositione huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui a peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris: Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod *etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.*

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vna vnis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quater, siue deniq; quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem dictæ propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, ceu videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici a duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria, & li

& linea recta illam tangens; vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non eße quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor; vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sic etiã omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil eße.

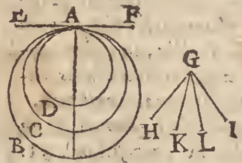
NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propositione. 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit vera pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori; non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi, maior sit angulo re-

eto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



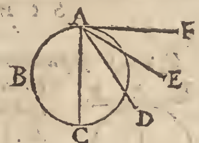
Proponantur enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur describantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam E F, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas G H, G I, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamē semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

1. poster. CAETERVM ex hac propositione 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR a minori ad maius vel cōtra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

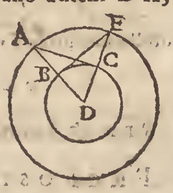
DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta ta D, E, F, donec circulum contingat in A; Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectũ maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoq; vitiosam esse posteriorem consequentiam.



PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda sit linea, quę tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum B C, in B; Deinde centro D, interuallo autem D A, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulum A E, in E. Ducta igitur recta E D, secans circulum B C, in C, connectatur recta A C, quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, ęqualia sint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrunque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusq; D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt & bases B E, C A, & anguli D B E, D C A, super ipsas, æquales: Est autem D B E, rectus ex constructione; igitur & D C A, rectus erit. Itaq; C A, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est A C, recta tangens circulum B C, in C. quod faciẽdũ erat. *4. primi.*



SCHOLION. I.

Qvod si punctum A, datum fuerit in circunferentia circuli A B, cuius centrum C, facilius ex eo ducetur recta tangens circulum, hoc modo. Ducta semidiametro A C, educatur per A, ad A C, perpendicularis D E. Hæc enim per corollarium præcedentis propositionis, circulum tanget: quod est propositum.

EX PELETARIO.

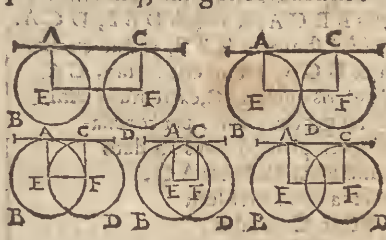
Lineae rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

Circvlvm A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circunferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangetq; circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum. 28.primi.

SCHOLION. II.

Sed & sequens problema cum Cardano absoluemus.

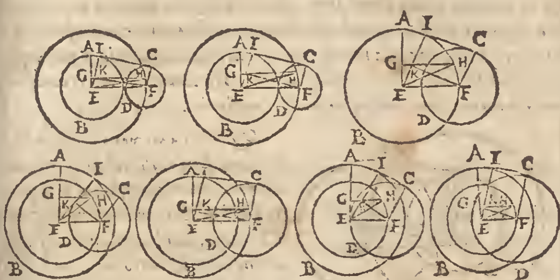
Propositis duobus circulis, quorum neuter alterū includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumq; tangat circulum.



Sint primo duo ꝓpositi circuli æquales A B, C D, quorū centra E, & F, recta iungantur EF, ad quā ducātur perpendiculares E A, F C, secātes circun-

circunferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrunq; circulum tangere. Cum enim E A, F C, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, & parallelæ, quod anguli E, & F, recti sint; Erunt quoq; E F, A C, æquales & parallelæ; Ideoq; & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta A C, vtrunq; circulũ tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum. 28.primi. 33. primi. 29.primi.

SINT secundo duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorũ rursus cẽtra E, & F, iungãtur recta EF, ad cuius inter



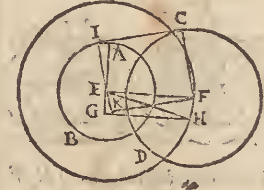
uallũ ex E, centro maioris circuli circulus describatur F H, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abscindatur ex ea recta A G, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi E A, perpendicularis ducatur G H, vsq; ad circunferentiã circuli vltimo descripti. Ducta aũt recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, æqualis; atq; ex F, agatur ipsi E I, parallela recta F C. Dico rectã p pũcta I, & C, ductã vtrũq; circulũ cõtingere. Abscindatur.n. ex I E, recta I K, ipsi A G, vel semidiametro F C, minoris circuli æqualis, vt sint reliquæ EG, EK, æquales quoq; ducaturq; recta K F. Quoniã igitũ latera HE, EG, trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, triãguli FEK, & anguli ipsis cõtenti æquales, ex cõstructione: Erunt anguli HGE, FKE, æquales; Ac proinde, cũ HGE, rectus sit, ex cõstructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK, æquales sunt, & parallelæ, ex cõstructione, erũt quoq; IC, KF, æquales & parallelæ; Atq; propterea angulus EIC, cũ æqualis sit externo FKE, rectus erit; 4.primi. 33. primi. 29.primi.

Ideoq;

Ideoq; & ICF, rectus existet. Quocirca per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrũq; circulũ cõtinget, cũ rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorũ. Quod erat ꝓpositũ.

SATIS *aũt constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinq; modis posse fieri. Aut.n.alius extra aliũ cadit, aut se mutuo cõtingũt, aut se inuicẽ p cẽtra secant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra consistant in cõmuni eorũ segmento, vel certe extra illud.*

ITEM *si circuli ꝓpositi fuerint inæquales, id cõtingere posse septẽ modis. Aut.n.minor totus extra maiorẽ cadit, aut ipsum tãgit, aut ipsũ secat, ita vt vel cẽtrũ eius sit in circũferẽtia maioris, vel intra, hac tamẽ lege, vt circũferẽtia minoris citra centrũ maioris trãseat, vel cẽtrũ minoris sit extra circunferẽtiã maioris, vel intra, ita tamẽ, vt circũferẽtia minoris ꝑ maioris centrum incedat, vel deniq; intra, ita tamen, vt circunferentia minoris includat centrum maioris.*



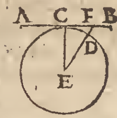
QVONIAM *vero, circulis inæqualibus existẽtibus, initiũ cõstructionis sumpsimus semp a maiori, si quis maluerit a minori ĩcipere, id efficiet eadẽ cõstructione, demõstrationeq́;, nisi q᷑ rectæ AE, IE, protrahẽdæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, cõtẽtos lateribus HE EG; FE, EK, idcirco æquales esse, q᷑ HEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, æquales sint ex cõstructione. Deniq; angulũ EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.*

17. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulũ tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiũcta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA AB, tãgat in C, circulũ CD, cuius cẽtrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularẽ esse ad AB.

AB. Si. n. nō eſt, ducatur EF, perpēdicularis ad AB, ſecās circunferentiā in D. Quoniā igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores ſunt duobus rectis; Et eſt EFC, rectus, ex cōſtructione: erit ECF, minor. Quare maior erit recta EC, hoc eſt, ED, quā EF, pars quā totū. qđ eſt abſurdū. Eſt igitur EC, perpēdicularis ad AB. Quare ſi circulū tāgat recta quæpiā linea, &c. Qđ demōſtrādū erat.



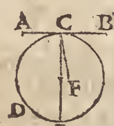
17. primi.
19. primi.

ALITER. Si EC, non eſt perpendicularis ad AB, erit alter angulorū Ad C, obtuſus, & alter acutus: Sit ergo ECB, acutus, q cū maior ſit angulo ſemicirculi ECD, erit angulus ſemicirculi minor angulo aliquo acuto: qđ eſt abſurdū. Oīs ſiquidem angulus ſemicirculi maior eſt omni acuto. 16. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a cōtactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, eſſe centrum circuli. Si enim eſt extra CE, ſit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod eſt abſurdū. Nō igitur extra CE, cētrū circuli exiſtet. Itaq; ſi circulū tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demōſtrandū. 18. tertij.



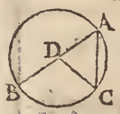
THEOR. 18. PROPOS. 20. 19.

IN circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

In circulo ABC, cuius centrum D, ſuper baſin BC, conſtituatur angulus BDC, ad centrum; & ſuper eandem baſin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplũ eſſe anguli BAC. Includant enim primo duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniã igitur rectæ DA, DB, æquales ſunt, erunt

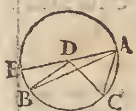
5.primi. anguli DAB, DBA, ęquales: Eſt autem ex-
32.primi. ternus angul⁹ BDE, æqualis duob⁹ angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorũ, vt anguli DAB Eodẽ mõ duplus oſtẽdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC: qđ eſt ꝓpoſitũ.

Secundo non includãt rectæ AB, AC, rectas DB, DC, ſed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis



32.primi. eſt duob⁹ internis DAC, DCA: Hi aũt duo
5.primi. inter ſe ſunt æquales, quod latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

Tertio recta AB, ſecet rectam DC, & per centrũ D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrũ, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandẽ baſin EC, & rectã AE, extẽditur per centrũ; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt oſtẽſum fuit: Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent.n.hi anguli eandẽ baſin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Si.n.totum totius eſt duplũ, & ablatũ ablati; erit & reliquũ reliqui duplũ. In circulo igit' angul⁹ ad cẽtrũ duplex eſt, &c. Qđ erat demõſtrãdũ.



19. pron.

SCHOLION.

Quod ſi rectæ BD, CD, in cẽtro angulũ nõ cõſtituãt ad partes baſis BC; qđ tũ demũ fit, quãdo ſegmentũ BAC, eſt vel ſemicirculus, vel ſegmentũ minus; nihilo minus ſpatiũ illud ad centrũ duplũ erit anguli ad circunferẽtiã, qui eãdẽ habeat baſin, quã ſpatiũ illud. Ducta.n.recta AE, per centrũ

trũ, erit tã angulus BDE, ad cẽtrũ duplus anguli BAE, ad circunferentiã, quã angulus CDE, ad centrũ anguli CAE, ad circunferẽtiã, vt ostẽsum est. Spatiũ igiť ad centrũ D, basin habẽs BEC, cõstansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplũ est totius anguli BAC. Quod est propositum.

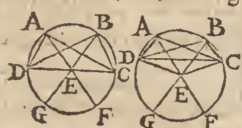
THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, existãt anguli A, & B, in segmento DABC; Dico eos esse æquales. Sit enim primo segmentum DABC, semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrũ E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cũ omnes habeant eandẽ basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. Quare inter se æquales erunt. Eadẽq; ratione oẽs alij anguli existentes in segmento DABC, ostendenť esse æquales.

20. tertij. *7. pron.*

SIT secũdo segmentũ DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducãtur ꝑ centrũ E, rectæ AF, BG, & in segmẽto minori connectãtur rectæ DE, CE. Qm̃ igiť angul⁹ DEF, ad cẽtrũ, dupl⁹ est anguli DAF, ad peripheriã: Similiter angulus CEF, anguli CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

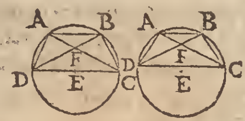


20. tertij.

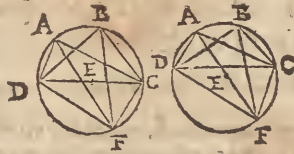
ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedẽtis demonstrauimus, spatiũ ad centrũ E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusq; anguli DAC, DBC, ad circunferentiam: Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales. *7. pron.*

ALITER. Secẽt sese rectę AC, BD, in F, & connectať recta AB; Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi,

quam



15.primi. quã hi æquales ſunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, qui æquales ſunt; erũt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF BCF, æquales ſunt oſtẽſi in ſegmẽto maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, ęquales ſunt.

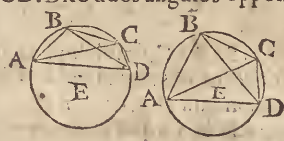


ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad pũctũ circũferẽtiæ quoduis F, includẽtibus cẽtrũ E, ita vt tã DABCF, q̃ FDABC, ſit ſegmẽtũ maius, iungitur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem ſegmento maiori DABCF, ęquales ſunt; nec nõ & anguli FAC, FBC, in ſegmẽto etiã maiori FDABC, exiſtẽtes: Si hi illis addãtur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaq; in circulo, qui in eodẽ ſegmento ſunt, &c. Quod erat oſtẽdendũ.

21. THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo, cuius cẽtrũ E, inſcriptũ ſit quadrilaterũ ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC, CDA: itẽ BCD, DAB, æquales eſſe duobus rectis. Ductis.n. diametris AC, BD, erunt duo anguli



21.tertii. ABD, ACD, ĩ eodẽ ſegmẽto ABCD, ęquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodẽ ſegmẽto CBAD, æquales Quare duo anguli ABD, CBD, hoc eſt, totus angulus ABC, æqualis eſt duobus angulis ACD, CAD. Addito igit̃ cõi angulo CDA, erũt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA:
32.primi. Sed hi tres æquales ſunt duobus rectis; igitur & duo

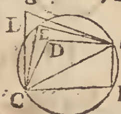
& duo ABC, CDA, duobus erũt rectis æquales. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis ęquales. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorũ, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM quoq; huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, q̃ ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circul⁹, qui ꝑ tres quoſcũq; eius angulos deſcribitur, trãſibit etiam per reliquũ quartũ angulũ; Atq; adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti A, & C; Item B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autẽ hoc fieri poſſit, in 25. propoſ. huius lib. & in 5. quarti lib. oſtendetur.) quem dico tranſire etiã per D. Si .n. nõ, tranſibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circunferẽtiã, ita vt nõ ſecent rectas CD, AD. Quo facto, erũt anguli B. & E, æquales duobus rectis; Erãt aũt & anguli B, & D, duobus rectis æquales: Igitur duo anguli B, E, æquales ſunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato cõi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod eſt abſurdũ. Ducta.n.recta AC, erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus ꝑ pũctũ D. qđ eſt propoſitũ



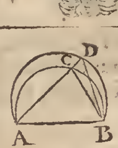
22. tertij.

21. primi.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

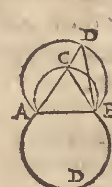
22.

SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, nõ conſtituentur ad eaſdem partes.



SI .n. fieri pōt, ſuꝑ recta AB, cōſtituãtur ad eaſdem partes duo ſegmēta ſimilia, & inęqualia ACB, ADB. Perſpicuũ ē aũt, qđ ſe ſolũ interſe-
10. *tertij.* cēt in pũctis A, & B; circulus .n. circulũ nō ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius ſegmēti tota erit extra peripheriã alterius. Ducatur igitur recta AD, ſecãs circunferētias in C, & D, & cōnectãtur rectę CB, DB. Quoniã igi. ſegmēta ponũtur ſimilia, erit ꝑ 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo
16. *primi.* ADB, externus interno: qđ eſt abſurdũ. Nō igitur ſegmēta ſimilia. Quare ſuꝑ eadē recta linea, &c. qđ erat demõſtrãdũ.

SCHOLION.



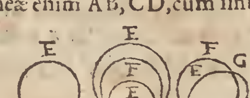
EADEM ratione, neq; ad diuerſas partes ſuper eadē recta linea duo ſegmēta circulorũ ſimilia, & inæqualia cōſtituētur. Nã ſi alterũ eorũ intelligat moueri circa lineã AB vt iã ambo ſint ad eaſdē partes, in idē abſurdũ incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, cōſtituta ſint ſegmēta ſimilia AEB, CFD. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmētũ AEB, ſegmento CFD, cōgruere. SI .n. nō cōgruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim in



tra Quod ſi extra cadat, aut intra, cōſtituētur ſuper eadē recta CD, duo ſegmēta AEB, AFB, ſimilia, & inęqualia; qđ eſt
23. *tertij.* abſurdũ. Demõſtratũ .n. eſt cōtrariũ. Qđ ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabũt ſeſe in pluribꝰ pũctis, q̃ duobꝰ, minimũ in A, P, G. Qđ eſt abſurdũ. Circuli .n. nō ſe ſecãt in plu
10. *tertij.* ribꝰ pũctis, q̃ duobus. Cōgruet igit ſegmētũ AEB, ſegmento CFD,

CFD, atq; adeo ipsa inter se æqualia erũt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

NON solum in hac propositione ostẽditur segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verũ etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSUM quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint.

PROBL. 3. PROPOS. 25. 24.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

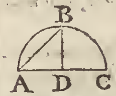
SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, uel maior est angulo DAB, uel æqualis, uel minor. Sit primo maior, (quod quidẽ continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum; cum ponatur esse minus, erit DA, maior, quam DB,

cum DB, perficiens diametrum, sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt; Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentũ ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, triãguli CDE, & anguli contenti, recti: Quare bases EA, EC, æquales erunt;

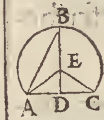
7. tertij. *18. primi* *4. primi*

Quare Est

6. primi Est autẽ & E A, æqualis ipsi E B, quod anguli E A B, E B A,
æquales sint. Igitur tres lineæ E A, E B, E C, æquales erũt, ac
9. tertij. propterea E centrũ erit circuli A B C. quandoquidẽ ex E, plu
res quã duæ rectæ æquales cadunt in circunferentiam.

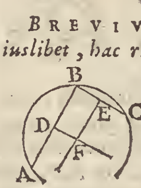
SIT secundo angulus D B A, angulo D A B, æqualis;
(Quod demũ continget, quando segmentũ A B C, semicircu


lus fuerit. Tunc.n erit A C, diameter, & D, cẽ-
trum, atq; adeo rectæ D A, D B, æquales; quare
5. primi & anguli D A B, D B A, æquales erunt.) Erunt
6. primi igitur rectæ D A, D B, æquales: Erat autem &
D C, æqualis ipsi D A; Quapropter cum tres rectæ D A,
9. tertij. D B, D C, cadant ex D, in circunferentiam, erit D, centrum.

SIT tertio angulus D B A, angulo D A B, minor, (quod
quidẽ eueniet, si segmentũ A B C, semicirculo maius extiterit.
Tunc enim, quoniam B D, transit per centrũ, ex corollario
propos. 1. huius lib. quod quidẽ intra segmentum, cũ maius
7. tertij. esse ponatur, existit; erit D B, omnium, quæ ex D, in circu


ferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit qu
18. primi D A, ideoq; angulus D A B, maior angulo D B A.
fiatq; angulus B A E, æqualis angulo D B A, & se-
cet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostẽ
detur esse centrum eodem modo, quo idipsum
ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo
D A B, ut constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur seg-
mento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum,
Quod facere oportebat.

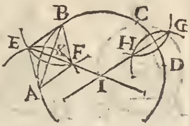
SCHOLION.

*BREVIVS inuenietur centrum segmenti propositi cu-
iuslibet, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti*


*tria puncta vtcunque A, B, & C quæ duabus
rectis coniungantur A B, B C; quæ bifariam
secentur in D, & E. Deinde ex D, & E,
educãtur ad A B, B C, perpendiculares D F,
E F. Quoniã igitur ꝑ corollariũ propos. 1. hu-
ius lib. tam D F, quã E F, incedit per centrum
circuli, cuius A B C, est segmentũ, coibunt ambæ in centro, vt
in F. Quare centrum est inuentum; quod est propositum.*

*ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circun
ferentia*

ferentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus describantur duo arcus ad idē interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F, Postea ex alijs duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describātur ad quoduis interuallum, siue idē quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ E F, G H, transibunt ambæ per centrū: quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autē lineæ E F, G H, per cētrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ A E, A F, B E, B F quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorū. Quoniā igitur latera A E, E F, trianguli A E F, æqualia sunt lateribus B E, E F, trianguli B E F; & bases quoque A F, B F, æquales: Erunt anguli A E F, B E F, æquales. Rursus ducta recta A B, quæ secet E F, in K; quoniā latera A E, E K, triāguli A E K, æqualia sunt lateribus B E, E K, triāguli B E K; & anguli A E K, B E K, ostensi quoque æquales; erunt & bases A K, B K, & anguli A K E, B K E, æquales, ideóque recti. Quare cum E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos; transibit per centrū ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum.



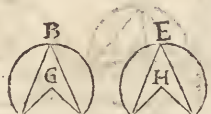
8. primi

4. primi

THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

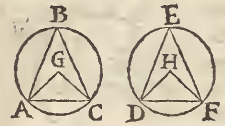
IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorū cētra G, H, cōstituti sint primo ad cētra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, q̃b⁹ insistūt, siue sup̱ quas ascēderūt, esse ęquales. Sumantur enim in peripherijs A B C, D E F, duo pūcta B, E, ad q̄ rectę ducantᷣ A B, C B, D E, F E, cō nectātur q; rectę A C, D F. Quoniam igitur anguli B, & E, dimidij sunt ęqualiū angulorum G, & H; erunt ipsi æquales inter se: Quare ex definitione segmēta A B C, D E F, similia erunt. 20. tertij.



Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorũ æqualitatem, & anguli, quos continẽt G, H, æquales, ex hypothesi; erũt

4. primi bases A C, D F, æquales: Cum igitur segmenta similia A B C, D E F, sint super lineas æquales A C, D F, erunt ipsa inter se æqua-



24. tertij. lia; Quare si a circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta A C, D F, inter se æqualia; atque adeo periphe riæ A C, D F: Quod est propositum.

SINT secundo ad periperipherias constituti duo anguli æquales B, & E; dico rursus, peripherias A C, D F, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut prius, segmenta A B C, D E F, similia. Cum igitur sint super æquales lineas A C, D F: (cum enim anguli G, H, æquales sint,

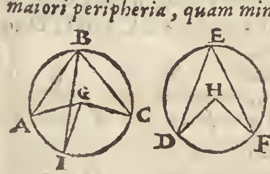
20. tertij. quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt

24. tertii. prius, rectæ A C, D F, æquales) erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta A C, D F, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

20. tertij. *HAEC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniã anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ A C, D F, super quas ascenderunt, æquales erunt.*

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheria, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, sit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Item angulus A B C, ad circumferentiam maior angulo D E F, ad circunferentiam. Dico peripheriam A C, maiorem esse peripheria D F. Si enim fiat angulus C G I, angulo D H E, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt, ut ostensum est, peripheriæ C I, D F, æquales;

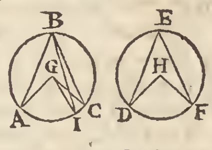


les; Ac propterea A C, *maior, quam* D F.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistũt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, insistant primo anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripherijs AC, DF; Dico angulos A G C, & D H F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cum igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales. 26. tertij.



INSISTANT secundo eisdem peripherijs æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt A B C, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus A B I; eruntque peripheriæ A I, DF, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod est absurdum. 26. tertij.

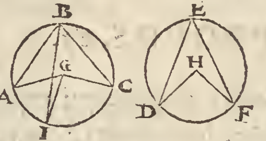
SCHOLION.

HAEC secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniã anguli A B C, *&* E, *dimidii sunt angulorum* A G C, *&* H, *quos iã ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.* 20. tertij.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum, siue ad circunferentiam, quam minori. In figura enim scholii præcedentis sit peripheria AC, *maior, quam peripheria* D F. *Dico angulum* A G C, *maio-*

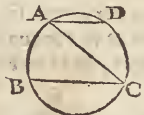
 -rem

rem esse angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo



D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ DF, ducanturq; rectæ IG, IB, erunt, ut ostēsum est, tā anguli ad cētrū CGI, DHF, quā anguli ad circunferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo DHF, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.

Ex hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo nō



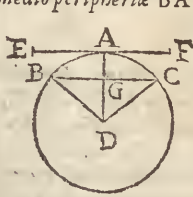
secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B. D C. Dico AD, B C, esse parallelas. Ducta namque recta A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales, erunt anguli
27. tertij A C B, C A D, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alter-
27. primi ni, erunt A D, BC, parallelæ.

Sint iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC, ducta
29. primi recta AC; erunt anguli alterni ACB, CAD, æquales; Ac pro-
26. tertij. inde arcus A B. DC, quibus insistunt, æquales erunt.

Visum est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: uidelicet.

Linea recta quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectę lineæ; quæ peripheriam illam subtendit.

In circulo A B C, cuius centrū D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF tangens circulum. Dico EF, parallelam esse rectæ BC, arcū BAC,



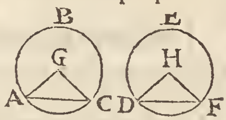
subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctū contactus A, recta DA, connexisq; rectis DB, D C, erunt anguli
27. tertij. ADB, A DC, circunferētijs æqualibus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli BDG lateribus C D, D G, trianguli
4. primi CDG, æqualia, utrumq; utriq;. Igitur & anguli ad G, æquales

les sunt, super bases G B, G C; ac propterea recti. Igitur & AGB AGC, illis deinceps recti sunt. Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti, quod D A, perpẽdicularis sit ad EF; Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum. 18. tertij. 28. primi

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

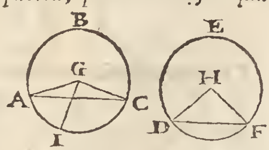
IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiorẽ quidem maiori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus A B C, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales A C, D F. Dico maiorẽ peripheriam ABC, æqualẽ esse maiori DEF; & minorẽ AC, minori D F. Ductis.n. rectis AG, GC, DH, H F, erunt latera AG, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, HF, trianguli DHF; Sunt autẽ & bases A C, DF, æquales: Igitur anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum. 8. primi 26. tertij.

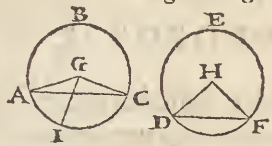


SCHOLION.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorẽ peripheriã, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nã si de segmẽtis circuli maiorib⁹ sermo habeãt, maior linea auferet minorem peripheriã, q̃ minor. In circulis.n. æqualib⁹ ABC, D E F, *quorum centra G, & H, sit recta* A C, *maior, quam D F. Dico peripheriam A C, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria D F; At peripheriam A B C, minorem*



norem peripheria D E F. *Ductis enim rectis* A G, GC, DH, H F, *erunt latera* AG, G C, *trianguli* AGC, *æqualia lateri bus* D H, H F, *trianguli* D H F; *Ponitur autem basis* AC,
25. primi *maior base* D F: *Igitur angulus* A G C, *maior erit angulo* D H F. *Fiat angulus* CGI, *angulo* D H F, *æqualis; erit-*
26. tertij. *que propterea peripheria* CI, *peripheriæ* D F, *æqualis*; *Ac proinde peripheria* AIC, *maior, quam peripheria* DF.

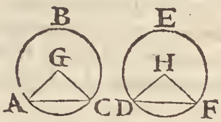


Ideoque reliqua A B C, *minor, quam reliqua* D E F.

28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales periphe rias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

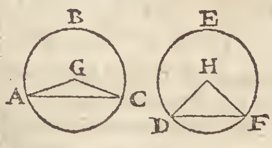
IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales periphe riæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateri bus D H, H F, trianguli DHF;



27. tertij. Sunt autē & anguli G, H, æqua- les, quod æqualibus peripherijs A C, D F, insistant: Igitur
4. primi bases A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorē maior linea, quam minorem, si de segmētis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmētis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem.



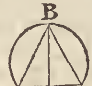
rem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, *quorum centra* G, *&* H. *ſint peripheriæ ſemicirculo minores* A C, D F, *ſitque* A C, *maior, quam* D F; *Ac proinde* A B C, *minor quam* D E F. *Dico lineam* A C, *maiorem eſſe, quam* D F. *Ductis enim rectis* A G, G C, D H, H F, *erit angulus* A G C, *maior angulo* D H F, *ex ſcholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera* A G, G C *trianguli* A G C *æqualia ſint lateribus* D H, H F, *trianguli* D H F, *erit baſis* A C, *maior baſe* D F, *&c.* 24. *primi*

SVNT autem proxime antecedentes quatuor propoſitiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo. Hoc eſt. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. ut conſtat ex demonſtrationibus adductis. Eædem enim locum habent in uno eodemque circulo.

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

DATAM peripheriam bifariam ſecare.

SIT peripheria A B C, ſecanda bifariam. Ducatur recta ſubtendens A C, qua diuiſa bifariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam ſecabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B; Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti: Igitur & baſes A B, C B, æquales erunt; Ac propterea peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus: Quod erat faciendum. 4. *primi* 28. *tertij.*

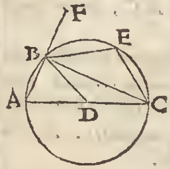


THEOR. 27. PROPOS. 31. 30.

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui uero in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris

ioris ſegmenti, recto quidẽ maior eſt: minoris autẽ ſegmenti angulus, minor eſt recto.

CIRCVLI ABC, cuius centrũ D, diameter ſit A C, cõſtituaturque in ſemicirculo angulus ABC, exiſtetq; angulus BAC, in maiori ſegmẽto CAB, conſtituatur quoq; in CEB, minori ſegmẽto angulus B E C. Dico angulum A B C, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum uero



BAC, in maiore ſegmento, minorem recto; & angulũ B E C, in minori ſegmento, maiorem recto. Item angulũ maioris ſegmenti cõprehenſum recta BC, & peripheria BAC, eſſe recto maiorem: At angulum minoris ſegmenti comprehẽſum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem. Ducantur enim rectæ B C, B D, & extendatur A B, in F. Quoniã igitur rectæ D A, D B, æquales ſunt, erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis erit: Eſt autem & angulus F B C, externus eiſdem duobus internis angulis B A C, BCA, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli A B C, F B C; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur eſt angulus A B C; quod eſt primum.

5. primi — *32. primi*

QVONIAM uero in triãgulo ABC, duo anguli ABC, & BAC, ſunt duobus rectis minores: Et eſt angulus ABC, oſtenſus rectus: Erit angulus BAC, in ſegmento maiori, recto minor; quod eſt ſecundum.

17 primi

RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulũ deſcripto, duo anguli oppoſiti BAC, & BEC, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, oſtenſus eſt recto minor: Erit B E C, angulus in ſegmento minore, recto maior; quod eſt tertium.

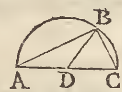
22. tertij.

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars ſit anguli ſegmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria BAC; erit angulus ſegmenti maioris, recto maior; quod eſt quartum.

POSTREMO, cũ angulus ſegmenti minoris, comprehenſus

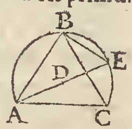
henſus recta B C, & peripheria B E C, pars ſit quoq; anguli recti FBC; Erit angulus ſegmẽti minoris, recto minor; quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt &c. Quod erat demonſtrandum.

ALIA demonſtratio huius propoſitionis. In ſemicirculo, cuius diameter A C, & centrũ D, ſit angulus ABC, quem dico eſſe rectũ. Ducta.n.recta B D, erunt anguli DBA, D A B, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales ſint. Cũ igitur angulus BDC, externus æqualis ſit duobus angulis internis DBA, DAB, in triãgulo ABD: Erit angulus BDC, duplus anguli DBA; Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DBC; atq; adeo duo anguli ad D, dupli erũt totius anguli ABC. Cũ igitur anguli ad D, ſint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorũ dimidius, rectus: quod eſt primũ.

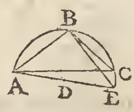


5. primi *32. primi* *13. primi*

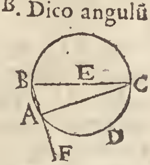
SIT rurſus in ſegmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod eſt ſecundum.



SIT iterum in ſegmento minori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto maiorem. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus; qui cum ſit pars anguli ABC, erit angulus A B C, recto maior: quod eſt tertium.



IAM vero proponatur ſegmentum maius A B C, & ſegmentum minus A D C, quorum centrum B. Dico angulũ C A B, ſegmenti maioris, eſſe recto maiorem; At angulum C A D, ſegmenti minoris, recto minorem. Ducta enim diametro C B & recta B A F; erit angulus B A C, in ſemicirculo rectus, atque adeo ei deinceps F A C. Cum igitur angulus rectus B A C, ſit pars anguli C A B, ſegmenti maioris: & angulus G A D, ſegmenti minoris, pars quoque



quoque anguli recti F A C; constat utrumque.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priori demonstratione.

EX CAMPANO.

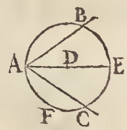
Ex hac propositione perspicuum quoque est, non ualere duas illas argumentationes, quas impugnauimus in propos. 16. huius lib. quarum una est.

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA uero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

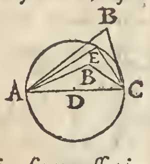
IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B. Erit igitur angulus A B E, segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur uersus A E, circa A, punctum fixum, faciet semper cũ peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit, ubi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si ulterius moueatur ad A C, faciet a fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, uel etiam segmenti minoris, quorum uterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, uitiosas esse prædictas consequentias.



SCHOLION.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis. Hoc est, segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, semicirculus est. Nam si esset maius, angulus in eo foret acutus; si minus, obtusus; & sic de reliquis partibus theorematis.

HINC etiã perspicuum est, si angulo recto recta subtensa bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circulus describatur ad *ad interuallum dimidiæ ſubtenſæ; circulum tranſire per angulum rectum. Angulo enim recto* A B C, *ſubtenſa* A C, *biſariam ſecetur in* D, *puncto, ex quo ad interuallum* D A, *uel* D C, *circulus deſcribatur* A E C, *quem dico tranſire per* B, *ſi enim tranſeat citra* B, *uel ultra, ductis re*

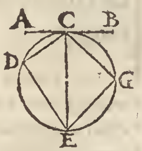


ctis A E, C E, *erit angulus* A E C, *rectus* 31. *tertij.*
quoque. Quare anguli recti B, & E, *æquales erunt; quod eſt abſurdum, cum angulus* E, *ſit neceſſario,*
uel maior, uel minor angulo B. *Tranſit igitur circulus per* 21. *primi*
punctum B, *quod eſt propoſitum.*

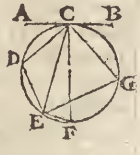
THEOR. 28. PROPOS. 32. 31.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C, puncto, a quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo ſegmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem eſſe angulo C G E, in alterno ſegmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque ſegmento. Tranſeat enim primo recta C E, per centrum. Erit igitur uterque angulus A C E, B C E, rectus: ſunt

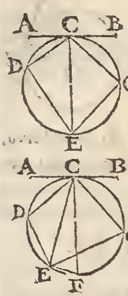


autem & anguli C G E, C D E, in ſemi- 18. *tertii*
circulis recti; Igitur angulus A C E, angu 31. *tertii*
lo C G E; & angulus B C E, angulo C D E, æqualis eſt.



NON tranſeat iam C E, recta per centrum. Ducta igitur recta C F, per centrum, connectatur recta E F, eritque C F, perpendicularis 18. *tertii*
ad

31. tertii ad A B, & angulus C E F, rectus; ac propterea reliqui anguli E C F, E F C, æquales erunt uni recto, ut angulo recto A C F. Dempto ergo communi angulo E C F, erit reliquus A C E, reliquo C F E, æqualis:



21. tertii Est autem angulo C F E, æqualis quoq; angulus CGE, cum uterque sit in segmento C G E. Quare angulus A C E, angulo C G E, æqualis erit. Quoniam uero in quadrilatero C D E G, duo anguli

22. tertii C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: Sunt autẽ & duo anguli A C E, B C E,

13. primi duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Potest theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

In eadem constructione transeat prius recta C E, per centrum, secans circulum CDE, & ducatur recta A B, per C faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tangere circulum. 31. tertii *Quoniam angulus C G E, rectus est; erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam uero C E, non transeat per centrum, construaturque figura, ut supra. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E;* 21. tertii *in alterno segmento maiori, & hic est æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo E C F, erit angulus A C F, æqualis duobus*

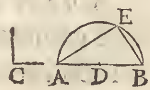
bus angulis E F C, E C F; *Atqui anguli* E F C, E C F, *æquales sunt uni recto, quod angulus* C E F, *rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo* C E F, *æquales sint duobus rectis*. *Angulus igitur* A C F, *rectus quoque erit, ideoque per coroll. propos.* 16. *huius lib.* A B, *circulum tanget*. 31. tertii 32. primi

EODEM *modo, si angulus* B C E, *æqualis fuerit angulo* C D E, *in alterno segmento minori, ostendetur recta* A B, *tangere circulum, Cum enim anguli* B C E, A C E; *duobus sint rectis æquales: Item duo anguli* C D E, C G E, *duobus rectis æquales; si demantur æquales* B C E, C D E *remanebunt anguli* A C E, C G E, *æquales. Quare, ut demonstratum iam est, recta* A B, *circulum tanget*. 13. primi 22. tertii

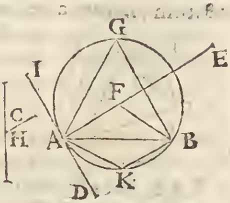
PROBL. 5. PROPOS. 33. 32.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RECTA data sit A B, & datus angulus primo rect' C. oportet igitur super A B, segmentũ describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur centro D; interuallo autem D A, uel D B, semicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nam angulus A E B, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto. 31. tertii.

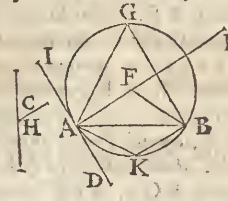


SIT secundo angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, ęqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis A E, q̃ cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A B, ęqualis angul' FBA, secetq; BF, rectã AE, in F. Erũt igitur rectę FA, FB, ęquales. Quare si cẽtro 6. primi



F, &

F, & interuallo F A, circulus deſcribatur A G B, tranſibit is per B. Dico igitur angulum in ſegmento A G B, quod deſcriptum eſt ſuper A B, eſſe æqualẽ angulo C. Fiat enim angulus in dicto ſegmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, tranſit, & ei perpendicularis eſt D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter angulus



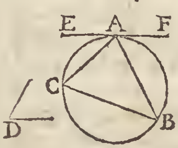
32. tertii. D A B, hoc eſt, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in ſegmento alterno.

SIT tertio angulus datus H, obtuſus. Fiat rurſus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ ſupra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, deſcriptumque erit ſuper A B, ſegmentum A K B, in quo angulus K, æqualis eſt angulo alterno I A B, hoc eſt, angulo dato obtuſo H. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat.

33. PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus ſit A B C, a quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit dato angulo



17. tertii. D. Ducatur recta E F, tangens circulum in A; Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulũ A C B, in ſegmento ablato A C B, ęqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim

32. tertii. angulus A C B, æqualis angulo alterno F A B, hoc eſt, angulo D. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum A C B, &c. Quod erat faciendum.

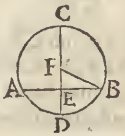
THEOR.

THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

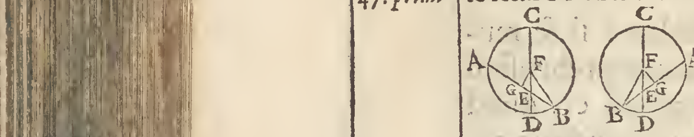
In circulo ACBD, ſecent ſe mutuo rectæ A B, C D, in E; Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis A E, E B, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis C E, E D. Aut enim utraque linea tranſit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Tranſeat primo utraque per cētrum. Quoniam igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub duobus, æquale eſſe ei, quod ſub reliquis duobus comprehenditur, rectangulo.

Transeat ſecundo C D, ſola per centrum F, diuidatque prius rectam A B, biſariam, ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta B F. Quoniam igitur C D, 3. tertij.
diuiſa eſt per æqualia in F, & per inæqualia in E; erit rectangulum ſub C E, E D, una cum quadrato rectæ E F, æquale quadrato rectæ F D, ideoque. quadrato rectæ F B; 5. ſecundi
Sunt.n. rectæ F D, F B. æquales: Eſt autē quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F E, E B; 47. primi
Igitur rectangulum ſub C E, E D, una cum quadrato rectæ E F, æquale erit quadratis rectarum F E, E B. Quare ablato commmuni quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum ſub C E, E D, æquale quadrato rectæ E B. hoc eſt, rectangulo ſub A E, E B; cum A E, E B, rectæ ſint æquales.



Diuidat iam C D, tranſiens per centrum rectam A B, nō biſariam. Secetur ergo A B, biſariam in G, ducanturque rectæ F G, F B, eritque F G, perpendicularis ad A B. Quoniam uero rectangulum ſub C E, E D, una cum quadrato 3. tertij.

5. secundi rectæ F E, æquale est quadrato rectæ F D, hoc est, quadra-
47. primi to rectæ F B: Est autem quadratum rectæ F E, æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F G, G B; Erit rectangulum sub C E, E D, una cum quadratis rectarũ F G, G E, æquale quadratis rectarũ F G, G B.



Dempto ergo cõmuni quadrato rectæ F G, remanebit rectangulũ sub C E, E D, una cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulũ sub A E, E B,
5. secundi una cum quadrato rectæ G E, æquale est eidem quadrato rectæ G B: Igitur rectangulũ sub C E, E D, una cũ quadrato rectæ G E, æquale est rectangulo sub A E, E B, una cum quadrato eiusdem rectæ G E. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale rectangulo sub A E, E B. quod est propositum.

TERTIO neutra per centrũ transeat, siue una illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta G H. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub A E, E B, æquale esse rectangulo sub G E, E H, siue A B, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub C E, E D, æquale esse quoq; eidem rectangulo sub G E, E H, siue C D, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. quod est propositum.

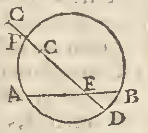
SCHOLION.

CONVERTI *poterit theorema istud hoc modo.*

SI duæ rectæ ita se secent, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus.

SECENT

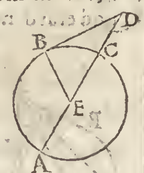
SECENT se mutuo rectæ A B, CD, in E, sitque rectangulum sub A E, E B, *æquale rectangulo sub C E, E D. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circunferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi. Describatur enim per tria puncta A,* D, *& B; circulus aliquis, (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut ultra C, vel citra, ut per F. Quoniam ergo rectangulum sub* F E, *E D, æquale est rectangulo sub A E, E B;* *35. tertij.* *& rectangulum sub* C E, *E D, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub A E, E B: Erunt rectangula sub C E, E D; & sub* F E, E D, *æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositũ.*



THEOR. 30. PROPOS. 36. 35.

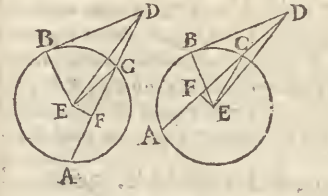
SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera uero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum A B C, punctum sumatur D, a quo linea ducatur D A, secans circulum in C, & linea D B, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub D A, D C, æquale esse quadrato rectæ D B. Transeat enim primo recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, quæ perpendicularis erit ad D B. *17. tertij.* *18. tertij.* Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E C, hoc est, cum quadrato rectæ E B, *6. secundi*



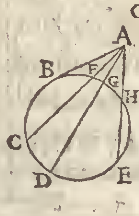
æquale quadrato rectæ D E : Eſt autem quadratum rectæ
47. *primi* D E, æquale quadratis rectarum E B, B D ; Quare rectangulum ſub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B; B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum ſub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale ; Quod eſt propoſitum.

NON tranſeat iam D A, per centrū E. Diuiſa ergo A C, biſariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F, eritque



18. *tertij.* E B, ad B D, perpendicularis; & E F, ad A C.
3. *tertij.* Quoniam igitur C A, diuiſa eſt per æqualia in F, & ei addita recta C D, erit rectangulum ſub D A, D C, una cum
6. *ſecundi* quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum ſub D A, D C, una cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum
47. *primi* D F, F E : Eſt autem quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratum rectæ E C, ideoque quadratū rectæ E B ; Et quadratis rectarum D F, F E, æquale eſt quadratum rectæ D E. Quare rectangulum ſub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadrato rectæ D E. Cum igitur quadra-
47. *primi* tum rectæ D E, æquale ſit quadratis rectarum D B, B E; erit & rectangulum ſub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo communi quadrato rectę B E, remanebit rectangulum ſub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale; quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM. I.

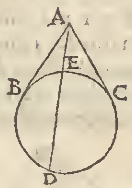


HINC manifeſtum eſt, quod ſi à puncto quouis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur, rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus, inter ſe ſunt æqualia. Vt ſi ex A, ducantur rectæ A C, A D, A E, ſecantes circulum in F, G, H, erunt rectangula ſub A C, A F; Item ſub

sub A D, A G; & sub A E, A H, æqualia inter se. Nam ducta A B, tangente circulum, erunt quadrato rectæ A B, æqualia singula dicta rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt. 36. tertij.

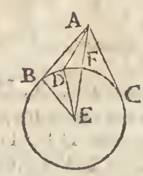
COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse equales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta A D, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quam quadratum rectæ A C, æquale rectangulo sub A D, A E; Quare quadrata rectarum A B, A C, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt. 36. tertij.



COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM denique est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangãt. Si enim præter duas A B, A C, duci possit tertia A D, circulum eundẽ tangens; ductis rectis E B, E D, ex centro E, erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta A E, erit angulus A D E, maior angulo A B E. 18. tertij. 21. primi



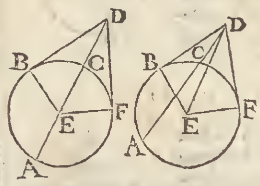
ALITER. Erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, ut ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta A E, ad centrũ E, quæ circulum secet in F, erit A D, cum sit propinquior minimę A F, minor, quam A B, quæ a minima A F, remotior est. Solum igitur duæ rectę ducentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum. 8. tertij.

THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum ſumatur D, a quo ducatur recta D A, circulum ſecans in C, & recta D B, incidens in circulum, ad punctum B; ſitque rectangulum ſub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B: Dico D B, circulum tangere in B. Ducatur enim A F, tangens circulum, & iungantur rectæ E B, E F. Quod ſi D A, ſecans non tranſeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo ſub D A, D C, æquale eſt quadratum rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo ſub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B, erunt quadrata rectarum D F, DB, inter ſe æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter ſe erunt. Itaque quia latera D F, FE, trianguli D F E, æqualia ſunt lateribus D B, B E, trianguli D B E, & baſis D E, communis; erunt anguli D F E, D B E, æquales: Atqui angulus D F E, rectus eſt, quod A F, circulum tangat: Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod eſt propoſitum. Si ergo extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

17. tertij.



36. tertij.

8. primi

18. tertij.

SCHOLION.

Est autem hoc theorema conuerſum præcedentis theorematis, vt perſpicuum eſt.

FINIS ELEMENTI TERTII.

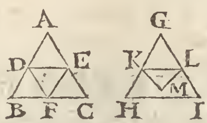
EVCLIDIS
ELEMENTVM IIII.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cũ ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

AGENS Euclides in quarto hoc libro de varijs inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus; nec nõ de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eadem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens a rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, eſſe inſcriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non tangit latus H I, trianguli G H I, non dicetur triangulum K L M, inſcribi in triangulo G H I; quamuis totum illud ſit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.



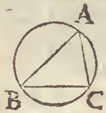
II.

SIMILITER & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circunſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E CONTRARIO dicetur triangulum ABC, deſcribi circa triangulum D E F; quoniam ſingula latera illius ſingulos huius angulos tangunt, &c. Idem intelligendum eſt de inſcriptionibus, ac circumſcriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cũ ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.



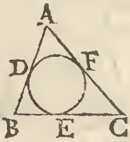
VT ſi tangant anguli A, B, C, trianguli A B C, peripheriam circuli A B C; dicetur triangulum in circulo eſſe inſcriptum. Quod ſi vnus tantũ angulorũ non tangeret peripheriã, nõ diceretur triangulũ eſſe inſcriptũ in circulo.

IIII.

FIGVRA uero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cũ ſingula latera eius, quæ circunſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT

At vero, si latera trianguli ABC, singula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

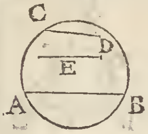
CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

Vicissim dicetur circulus DEF, inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, descriptus esse circa triangulum ABC. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Vt recta linea AB, quoniam eius extrema A, & B, in periphe-

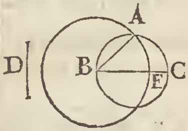


peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, uel CD; quia hæc vnum duntaxat extremum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero nullum.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

In circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. (Cum enim diameter sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta, diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi una æqualis) Ducatur diameter B C. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si uero D, minor fuerit diametro, abscindatur BE, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autē BE, circulus describatur EA, secans circulū A B C, in A; Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. Est enim BA, æqualis ipsi B E; & D, æqualis eidē BE, per constructionē: Quare AB, & D, inter se æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat. *15. tertij.*



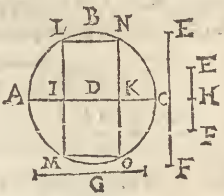
EX FEDERICO COMMANDINO.

In dato circulo rectam lineam accōmodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

In dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda sit recta

cta equalis rectæ E F, quę diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. Ducatur per centrum D, diameter A C, rectę G, parallela. Quod si recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si uero E F, diametro minor fuerit, ea secta bifariam in H, abscindatur DI, ipsi HB, & DK, ipsi HF, æqualis, ut tota IK, toti E F, sit æqualis. Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur LM, NO; iungaturq; L N. Dico LN, accõmodatam esse æqualem ipsi E F, & ipsi G, parallelam. Cum enim L M, NO, ęqualiter a centro distent, ipsæ æquales inter se erunt: quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur a recta A C, per centrum D, transeunte; erunt & earum dimidię L I, N K, æquales. Quia uero L I, N K, parallelę etiam sunt; erunt quoque L N, I K, æquales, & parallelę. Quare cum I K, æqualis sit ipsi E F, & parallela ipsi G; Erit etiam L N, æqualis ipsi E F, & ipsi G, parallela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi E F, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

31. *primi*



11. *primi*

14. *tertij.*

3. *tertij.*

28. *primi*

33. *primi.*

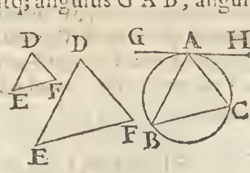
30. *primi*

PROBL. 2. PROPOS. 2.

2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo ABC, dato describendũ triangulũ æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatq; angulus G A B, angulo F, ęqualis, & angulus HAC, angulo E; atq; extendantur rectæ A B, A C, ad circunferentiam usque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo D E F. Est enim angulus C, æqualis angulo G A B; & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione: Quare anguli C, & F, inter se quoq; erũt æquales. Similiter quia angulus B, æqualis est angulo H A C, & eidem angulo H A C, ęqualis est, per cõstructionẽ, angulus E; erũt etiã anguli B, & E, inter se ęquales.



32. *tertij.*

32. *tertij.*

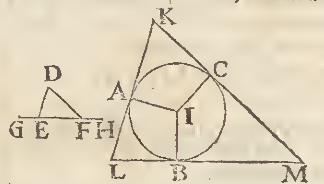
Cum

Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, erunt quoque
32. primi reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta utcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G; & angulus BIC, angulo DFH; Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, CI, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis



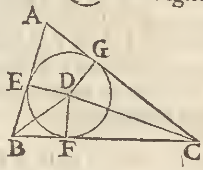
A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K L, M; (si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; quare A K, C K, coibunt, &c.) Descriptum est igitur circa circulũ triangulum K L M, quod dico esse æquiangulũ triangulo DEF. Quoniam omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, ut ad 32. propo. lib. 1 ostensum fuit; & anguli I A L, & IBL, sunt duo recti; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli D E G,
13 primi. D E F, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales A I B, & D E G, remanebit angulus L, angulo DEF æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse
32. primi angulo D F E. Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inſcribere. 4.

SIT deſcribendus circulus in dato triangulo A B C. Diuiſis duobus angulis A B C A C B, biſariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tr a latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales ſunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, uterque utrique; & latus B D, commune; erunt quoque latera D E, D F, æqualia. 25. primi

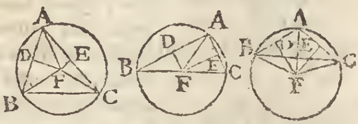


Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, D F, D G, ſint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & G; tangetq; latera trianguli in E, F G, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod perpendicularia ſint ad ſemidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

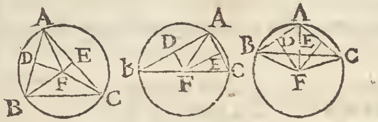
PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.

SIT circulus deſcribendus circa datum triangulũ ABC Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, uel obtuſangulo ſumenda ſunt circa rectum, uel obtuſum angulum) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet.



tet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, uel intra triangulum, uel in latere BC, uel extra triãgulum.



Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, triãguli BDF, & anguli ad D, recti: erũt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

4. primi

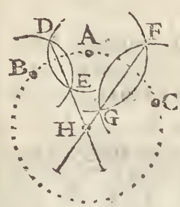
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si uero sit in latere BC, angulum BAC, esse rectum, quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulũ BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

CONTRA uero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum.

SCHOLION.

COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat.



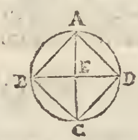
Nam si data puncta tribus rectis iungantur, ut constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo, duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur DH.

D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo, uel etiam, si placet, eodem, alij duo arcus delineentur secantes se se in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in H. Dico H, esse centrũ circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam a rectis D H, F H, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare ut in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B-C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; erũt bases A B, B C, æquales. Eadem ratione *4. primi*



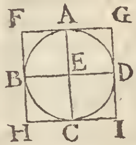
æquales erunt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Sunt autem & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit A B-C D; propptereaque in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum. *31. tertij.*

PROBL. 7. PROPOS. 7. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, describendum

describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro, ad angulos rectos, & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico F H I G, esse quadratũ circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli A E B, F B E, sint recti, erũt



28. primi F H, A C, parallelæ; similiterque erunt

30. primi G I, A C, parallelæ. Quare & F H, GI parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est

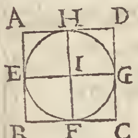
34. primi A C H F, erunt latera opposita A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: sed A C H, est rectus, igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus, angulos H, I, G, rectos esse, & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris B D, A C. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales, & parallelæ. Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H.



33. primi Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D, ideoque rectæ I E, I F I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E; sunt autem hæ inter se æquales, cum sint dimidiæ æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, IF, I G,

I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus deſcriptus ex I, ad interuallum I E, tranſibit quoque per puncta F, G, H; qui cum contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat. *29. primi*

PROBL. 9. PROPOS. 9. *9.*

CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.

SIT deſcribendus circulus circa quadratum A B C D. Ducantur diametri A C, B D, ſecantes ſe in E. Quoniam igitur latera A B, D, A trianguli A B D, æqualia ſunt; erunt anguli A B D, A D B, æquales: eſt autẽ angulus B A D, rectus; Quare A B D, A D B, ſemirecti erunt. Similiter oſtendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, eſſe ſemirectos, & idcirco inter ſe æquales. Cum ergo anguli E A D, E D A, ſint æquales; erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, deſcriptus, interuallo E A, tranſibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulũ deſcripſimus, quod erat faciendũ. *5. primi* *32. primi* *6. primi*

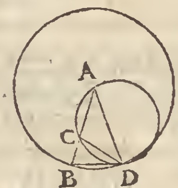
SCHOLION.

QVOD ſi circa datum circulum deſcribatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inſcribatur, erit quadratum circumſcriptum quadrati inſcripti duplum. Quoniam latus quadrati circumſcripti æquale eſt diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. conſtat, hoc eſt, diametro quadrati inſcripti: quadratum uero diametri duplum eſt quadrati, cuius eſt diameter, ut ad 47. propos. lib. 1. oſtendimus; Conſtat propoſitum.

10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulũ conſtituere; quod habeat utrumq; eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea A B, quę diuidatur in
11. *ſecundi* C, ita ut rectangulũ ſub A B, B C, æquale ſit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo uero A B, circulus deſcri-
1. *quarti* batur, in quo accommodetur recta B D, æqualis ipſi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales ſunt, erit triangulum A B D, Iſoſceles. Dico utrumq; angulorum A B D, A D B, duplum eſſe reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, deſcribatur circa triangulũ A C D,
5. *quarti.* circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum ſub A B, B C, æquale eſt quadrato rectę A C, hoc eſt, quadrato



rectæ B D; & recta A B, ſecat circulum D C A: tanget re-
37. *tertij.* cta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus
32. *tertij.* B D C, æqualis eſt angulo A, in alterno ſegmento C A D. Addito igitur cõmuni C D A, erit totus angulus A D B, æqua-
32. *primi* lis duobus angulis C A D, C D A; ſed his eiſdem æqualis eſt, etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis
5. *primi* erit angulo A D B, hoc eſt, angulo A B D, cum A B D, A D B,
6. *primi* æquales ſint; ac propterea rectæ C D, B D, æquales erunt: Eſt autẽ B D, æqualis poſita rectæ A C. Igitur & C D, ipſi
5. *primi* C A, æqualis erit, ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Cum igitur angulus A, ęqualis ſit oſtẽſus angulo B D C, erũt quoque anguli B D C, C D A, æquales; ac propterea angulus A D B, duplus erit anguli C D A, hoc eſt, anguli A, ſibi ęqualis. Quare & angulus A B D, duplus erit eiuſdẽ anguli A. Iſoſceles ergo triangulum cõſtituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.

SCHOLION.

NON eſt autem quod ſe excrucient Campanus, & Peletarius, ut probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, ut cũ nullo

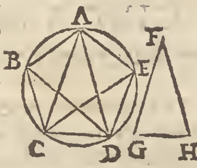
nullo modo secet. Nã propterea quod quadratũ recta B D, æquale est rectangulo sub A B, BC, ostensum est in ultima propos. 3. lib. rectam B D, perpendiculare esse ad semidiametrũ circuli ex D, ductam. Quare circulũ tanget, & nulla ratione secabit.

PROBL. II. PROPOS. II. II.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Construatur triangulum Isosceles FGH, ita ut uterq; angulorũ G, H, duplus sit reliqui F. & in circulo inscribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo F G H, & uterq; angulorũ ACD, ADC, bifariam diuidatur rectis C E, D B; atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inscriptum, esse æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum A C D, A D C, duplus sit anguli C A D; & diuisus bifariam; erunt quinque anguli A D B, BDC, C A D, D C E, A C E, æquales. Quare arcus AB, BC, CD, DE, E A, super quos ascenderunt, atq; idcirco & rectæ AB, BC, CD, D E, E A, æquales erunt. Aequilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, E D, æquales sunt, addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB; Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus insistẽtes æquales erunt. Eodẽ modo æquales erunt cuilibet horũ angulorũ reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulũ est ergo pentagonum ABCDE. Quare cũ & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptũ erit in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendũ erat.

10. quarti
2. quarti
9. primi



26. tertij.
29. tertij.
27. tertij.

SCHOLION.

QVOD si detur recta linea terminata C D, super ea

 consti-

10.quarti *constituemus petagonum æquilaterum, & æquiangulum; hoc modo. Fiat triangulum Isosceles F G H; habens quemlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituant anguli A C D, A D C, æquales angulis G, H, coeantq; rectæ C A, D A, in A, quæ efficient*

32. primi *angulum C A D, æqualem angulo F; atque propterea trianguli A C D, vterque angulorum A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam vero circa triangulum A C D,*
5.quarti *circulus describatur A B C D E; In quo cum sit inscriptum triangulum A C D, si anguli A C D, A D C, bifariam secentur, inscribetur ut prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta C D. Quod est propositum.*

12. PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit circa datum circulum A B C D E, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Inscribatur in
11.quarti eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducantur rectæ F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducant perpendiculares G H, H I, I K, K L, L G, coeuntes in G, H, I, K, L, Cum .n. anguli G A E, G E A, duobus sint rectis minores, coibunt

11. pron. rectæ A G, E G, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum G H I K L, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, ac æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L; erunt quadrato rectæ F H,
47.primi æqualia tam quadrata rectarum F A, A H, quam rectarum F B, B H: Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarum F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebũt quadrata rectarũ A H, B H, æqualia; ideoq; & rectæ A H,

B H,

BH, æquales erunt. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia ſunt lateribus B F, F H, trianguli BFH; Eſt autem & baſis A H, baſi B H, æqualis, ut oſtenſum eſt: erunt anguli A F H, B F H, æquales; Igitur & anguli A H F, B H F. Duplus igitur eſt angulus A F B, anguli B F H; & angulus A H B, anguli B H F. Eodem modo oſtendemus, angulum B F C, duplum eſſe anguli B F I, & angulũ B I C, anguli B I F. Cum igitur anguli AFB, BFC, ſint æquales, quod inſiſtant circunferentijs A B, BC, quæ æquales ſunt, cum a rectis æqualibus ſubtendantur A B, BC; erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cum duo anguli B F H, H B F, trianguli B F H, æquales ſint duobus angulis B F I, I B F, trianguli I F B, & latus illis adiacens commune B F; erunt & latera B H, B I, æqualia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla eſt ergo recta H I, rectæ H B. Eademque ratione oſtendemus G H, rectam duplam eſſe rectæ H A: Sunt autem oſtenſæ æquales H B, H A; igitur & earum duplæ H I, H G, æquales erũt. Similiter demonſtrabimus, rectas I K, K L, L G, æquales eſſe cuilibet rectarum H I, H G. Aequilaterum ergo eſt pentagonum G H I K L. Rurſus quoniam oſtenſum eſt angulos B H F, B I F, æquales eſſe, ac dimidios angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli B H A, B I C, æquales. Eademque ratione anguli I K L, K L G, L G H, erunt æquales cuilibet angulorum B H A, B I C. Aequiangulum igitur eſt pentagonum G H I K L. Quapropter cum & æquilaterum ſit oſtenſum, deſcriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. quod efficiendum erat.

8. primi
4 primi.
27. tertij.
28. tertij.
26. primi

PROBL. 13. PROPOS. 13.

13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.

Sit inſcribẽdus circulus in dato pentagono ABCDE; Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F. Cum enim anguli BAF, ABF, 9. primi

 ſint

ſint minores duobus rectis, coibunt neceſſario rectæ A F B F. Connectantur deinde rectæ F C, F D, F E. Quoniā igitur latera A B, B F, trianguli A B F; æqualia ſunt lateribus

CB, BF, triāguli CBF; Sunt autē & anguli ipſis contenti æquales A B F, C B F, erunt

4. primi bases A F, CF, & anguli B A F, B C F, æquales. Cum igitur anguli B A E, B C D, ponātur æquales, & B A F, dimidium ſit anguli B A E, per conſtructionem; erit & B C F, dimidium anguli B C D. Diuiſus eſt ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo oſtendemus, reliquos duos angulos C D E, D E A; diuiſos eſſe bifariam. Ducantur iam ex F, ad ſingula Pentagoni latera perpendiculares F G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli F G A, F A G; trianguli F A G, æquales ſunt duobus angulis F L A, F A L, trianguli F A L; eſtque latus A F ſubtenſum uni æqualium angulorum, commune; erunt &

26. primi rectæ F G, F L, æquales. ſimiliterque oſtendentur reliquæ perpendiculares F H, F I, F K, æquales cuilibet iſtarum. Circulus igitur deſcriptus ex centro F, & interuallo F G, tranſibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam uero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per corroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cū rectis F G, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inſcriptus. Quod faciendum erat.

14. PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulū circulū deſcribere.

SIT circa pentagonū ABCDE, æquilaterū, & æquiangulum, circulus deſcribendus. Diuiſis duobus angulis BAE, ABC, bifariā rectis A F, B F, quæ coeant in F;

& coniūctis rectis F C, F D, F E, oſtēdemus, ut in præcedenti problemate, reliquos ētiā angulos B C D, C D E, D E A, ſecari bifariā; Erunt ergo oēs anguli dimidij inter ſe æquales, quod toti anguli æquales ponātur. Quoniā igitur in triāgulo A F B, duo

duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt; rectæ FA, FB, æquales. Eademq; ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autē FA, transibit quoq; per puncta B, C, D, E. Circa datū ergo pentagonū, &c. Quod faciendum erat. 6. primi

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

Sit in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribendū hexagonum æquilaterū, & æquiangulum. Ducta diametro A D, describatur circulus ex centro D, interuallo uero D G, qui secet circulū datū in punctis C, & E, e quibus per centrū G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum, & æquiangulum. Cū enim recta G C, æqualis sit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, DC, æquales inter se. Ideoq; triangulum C D G, erit æquilaterū. Quare tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars unius recti. Eodē modo erit angulus DGE, tertia pars unius recti. Sunt autē tres anguli CGD, DGE, EGF, ęquales duobus rectis: Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars est unius recti. Sūt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se ęquales; quibus cū etiā ęquales sint anguli FGA, AGB, BGC; erūt sex anguli ad cētrū G, ęquales. Quare circūferentię, quibus insistūt, ac propterea rectę AB, BC, CD, DE, EF, FA, ęquales erunt. Quapropter ęquilaterum est hexagonū ABCDEF. Rursus quia circunferentia BC, æqualis est circunferentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt circunferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC. æquales erunt. Similiterq; ostēdemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorū. Quare ęquiangulū quoq; est hexago-

5. primi
32. primi.
13. primi
15. primi
26. tertij.
29. tertij.
27. tertij.

num A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonũ æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendũ erat.

COROLLARIVM.

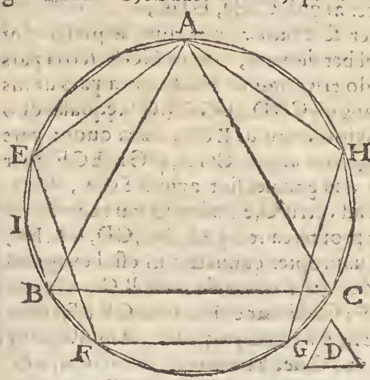
Hinc manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

Caeterum per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & equiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono equilatero, & equiangulo circulum inscribemus, & tandem circa idem hexagonum describemus circulum.

16. PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, (2. *quarti*)



eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales. (28. *tertij*.) Qualium igitur partiũ æqualium quindecim est circunferẽtia tota ABC, talium quinque erit arcus A B, q tertia pars est totius circunferentiæ. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum (11. *quarti*.) A E F G H, eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A. (28. *tertij*.)

HA, æquales. Qualium igitur partium æqualiū quindecim est tota circunferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars existens, totius circunferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiso ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circunferentiæ. Quare ducta recta B I, subtendet decimam quintam partem totius circunferentiæ; cui si aliæ quatuordecim æquales in circulo accomodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, ut perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod erat faciendum. 30. tertij. 1. quarti 27. tertij.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum; Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

SCHOLION I.

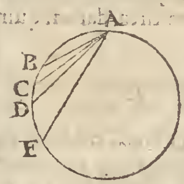
Ex huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, ac ars quædam, qua infinitæ propemodū figuræ in dato circulo inscribantur. Nam quia recta A B, denominatur a ternario, quod sit latus trianguli æquilateri, & recta A E, a quinario, quod sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex dictis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B; hoc est, 3. exceditur a denominatore lateris A E, nempe a 5, binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiso arcu B E, bifariam in I, erit subtensa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur

duo

duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus interdicta latera inclusus, tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR *in circulo A B C D E, initio semper facto a puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem A B, pentagoni uero A C, & quadrati A D, trianguli denique æquilateri A E. Quoniã igitur denominator lateris A B nempe 6. excedit denominatorem lateris A C, nempe 5. vnitate; continebit arcus B C, inter dicta latera inclusus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium: Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30. est tota circunferentia, taliũ 5. est arcus A B, sexta pars circunferentiæ; & talium 6. est arcus A C, quinta pars circunferentiæ. Igitur arcus B C, unam talem continebit partem. Pari ratione arcus B D, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium: Nam denominator lateris A B, uidelicet 6. superat denominatorem lateris A D, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24. Ita quoque arcus B E, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum. Arcus uero C D, complectetur unum latus figuræ 20. laterum; & arcus C E, duo latera figuræ 15. laterum. Arcus denique D E, continebit unum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarũ figurarum latera.*



EX CAMPANO.

OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, aut circunscripta, est

est quoque æquiangula. Nam figuræ inscriptæ anguli, cum insistant arcubus æqualibus, æquales erunt. Anguli uero circumscriptæ, æquales ostendentur, ductis a centro rectis lineis ad omnes angulos, & ad puncta, quibus latera circulum tangunt, ut in pentagono est factum, propos. 12. 27. tertij.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoque inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterũ, figuræ 32. 64. 128. laterum, &c.

SCHOLION II.

OMNES figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt officio Isoscelium triangulorum, ut recte hoc loco docet Peletarius.

IMPARIVM enim laterũ figuræ inscribent officio triangulorũ Isosceliũ, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad uerticem sunt, angulorum. Vt officio Isosceles, cuius uterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad uerticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulũ æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulũ æquilaterũ erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterq; angulorũ ad basin duplus sit eius, 6. primi *qui ad uerticem, inscribetur secunda figura imparium laterũ, utpote pentagonũ, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam, ueluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonũ, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triãgulũ Isosceles habens utrumq; angulorum ad basin triplum eius, qui ad uerticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad uerticẽ. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur* 23. primi *officio Isoscelis, cuius uterq; angulorũ ad basin quadruplus est eius, qui ad uerticem, si uterq; distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad uerticem, &c.* 23. primi

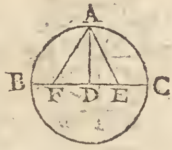
PARIVM

PARIVM vero laterum figuræ in circulo inscribentur, officio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circunferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem; subtendent ipsi tres partes circunferentiæ, & idcirco angulus ad verticem unam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sextæ parti circunferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis habentis vtrunque angulorum ad basin triplum sesquialterum angulo ad uerticem, &c.

SI igitur inuenta fuisset ars, qua Isoscelia triangula construerentur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad uerticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad uerticem, facile in circulo describerentur figuræ omnes laterum imparium. Quod si arcus earum diuiderentur bifariam, inscriberentur quoque omnes figuræ parium laterum; atque adeo quælibet circunferentia circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuideretur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit: Non enim recte sibi eam uendicat Orontius Finæus in libello hactenus, ut ipse ait, desiderato, de absoluta rectilineorum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, ut Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

QVONIAM vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxim quandam, qua una eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus

culus A B C; cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui aequales abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit A F, latus pentagoni, & D F, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, ut ipse demonstrat. Caeterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non uidetur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in propos. 13. differenda.



NON erit autem praeter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienũ, si sequens adhuc theorema adiungamus; videlicet.

SI bifariae sectiones laterum figurae equilaterae, & aequiangulae rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura aequilatera quoque & aequiangula in dicta figura, idem centrũ habens.

SIT enim figura aequilatera, & aequiangula ABCDEF, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inscriptam figurae ABCDEF, aequilateram esse quoque, ac aequiangulam, idemque centrum habere. Aequilatera quidem erit, quoniam eius latera subtendunt angulos aequales cõprehensos aequalibus rectis, utpote dimidijs laterum aequalium, aequalia sunt. Quoniam uero tam tres anguli A M G, 4. primi

G M L, L M F, quam tres F L M, M L K, K L E, duobus sunt rectis aequales; Sunt autem A M G, L M F, F L M, K L E, inter se aequales, cum aequalibus lateribus contineantur, subtendanturque a basibus aequalibus: Erunt reliqui anguli G M L, M L K, aequales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se aequales esse. Aequiangula igitur quoque est figura G H I K L M. Quod 13. primi. / 8. primi. / 13. primi

autem

autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunctis quoque rectis N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; suntq; bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figurã descripti, æquales: Aequales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemq; modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum ostendant distantias rectarum A B, B C, &c. æqualium a centro N; æquales ad inuicem erunt Circulus igitur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet: Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M. Quod est propositum.

8 primi

14. tertij.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM V.

DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in præcedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata: Nunc uero in duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed pro ut una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. In hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, nõ descendendo ad ullam eius speciem, ut ad lineam, superficiẽ, vel corpus aliquod. In 6. lib. uero ostendit, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circunferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius uocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C; dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C.

At

At uero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit a magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita ut aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum uel excedit, vel ab eodē deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Priordici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc in loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia ut ex lib. 7. constabit, pars aliquanta non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc in loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc utramq; illam metitur. At uero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metiatur. Itaque pars ad multiplex refertur,

fertur, & multiplex ad partem, ita minor quantitas mensurãs maiorem, dicatur pars maioris; Maior uero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfecte metitur suum totũ. Si enim 6. diceretur metiri 7. ut uult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundũ quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, ut duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod vna maior est, quam altera, uel minor, uel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (ut alijs placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, uel numerus cum linea, non dicetur ea cõparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea, sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod una est alba, & altera nigra; aut quod vna est calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QVAMVIS autem in solis quantitatibus proprie reperiatur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, uoces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora considerantur, veluti quantitates.

CAETERVM in omnĩ proportione ea quantitas, quæ ad *aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea uero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si econtrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum, ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens uero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.*

DE PROPORTIONIBUS.

OPERAE pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionũ apud Mathematicos, uel ob hanc præcipue utilitatem, ut ea, quæ in his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis uero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati, ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, ceu in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem uero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autẽ quantitates commensurabiles, quæ habent unam cõmunem

munem partem aliquotam, seu quas eadem mensura metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorũ est utriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineã 20. palmorum; Ita quoque eadem lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem unitas omnes metitur. Quantitates uero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri: Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. quamuis enim quælibet harum linearũ infinitas habeat partes aliquotas, utpote partem dimidiam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota unius, quantumuis minima, alteram metiri potest, ut demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. ultima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter dictas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

Alio modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, ut inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorũ, & lineã 10. palmorũ, &c. Inæqualitatis uero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, ut inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duo-

bus eam connexionem, ut omnis proportio æqualitatis ſit neceßario rationalis, ſed non contra. Omnis item proportio irrationalis neceßario ſit proportio inæqualitatis, ſed non contra. Ex quo manifeſtum eſt, non recte a quibuſdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis ſit neceßario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiuſmodi eſt rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis ſint irrationales. Pari ratione perſpicuum eſt, quoſdam non recte diſtribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis ſit neceſſario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiuſmodi proportio e contrario eſt proportio inæqualitatis; cum multæ proportiones rationales ſint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuiſione ſecanda eſt proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Poſteriori vero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; ut a nobis factum eſt.

RVRSVS *proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius ſubdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales ſiue magnæ, ſiue paruæ fuerint, eandem ſemper habeãt proportionem æqualitatis) ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio eſt, quãdo maior quãtitas cum minore confertur; qualis eſt proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c.*

Pro-

Proportio minoris inæqualitatis est, quãdo minor quã titas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis & superuacanea, ut multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2: quæ 2. ad 4. Sed multum inter se differunt, cum ualde diuersus sit usus utriusque, ut perspicuum est ijs, qui uel mediocriter in rebus geometricis, & regula Algebræ sunt uersati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla seclusa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniã de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO *ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, ut in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Pari ratione proportio minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis uocabulis præponatur præpositio (sub) ut in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientẽ. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora uero duo ex illis tribus composita, ut manifestũ est. Cur uero tantum sint quinq; hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, prope finem omnium proportionum ostendemus.*

PROPORTIO Multiplex, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, decies, centies, &c. continet, qualis est proportio 20. ad 4. Nam 20. comprehendunt 4. quinquies. Item lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c. Hæc autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorē bis tantū continet, dicitur proportio dupla; si ter, tripla; si decies, decupla; si centies, centupla, &c. Itaque proportio octupla nil est aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodem modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: ut proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicitur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10 cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

PROPORTIO superparticularis, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper unam eius partem aliquotam, scilicet dimidiam, tertiam, quartam, &c. qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & adhuc unitatem, quæ dimidia pars est 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & adhuc lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c. Hæc quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est medietas minoris quantitatis, constituitur proportio sesqui-

ſeſquialtera; Si eſt tertia pars, exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi milleſima, ſeſquimilleſima, &c. Vnde ex ipſomet uocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuperparticularium. Erit enim proportio ſeſquioctaua, quādo maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. & inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

PROPORTIO *ſuperpartiens, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes unam aliquotā. qualis eſt proportio 8. ad 5. Nam 8. continent ſemel 5. & inſuper tres unitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, utpote quinta, huius numeri 5. Conſtat autem ternarium ex illis compoſitum, non eſſe partem unam aliquotam numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere conſtituere unam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aſpectu uidentur eſſe ſuperpartientes, cum tamen ſint ſuperparticulares; cuiuſmodi proportio eſt inter 10. & 8. Quamuis enim 10. contineant ſemel 8. & duas unitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8. tamen quia binarius ex illis unitatibus compoſitus, eſt quarta pars 8. non dicenda eſt ea proportio ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta. Itaque, ut duæ quantitates dicantur habere proportionem ſuperpartientem, neceſſe eſt, ut maior quantitas minorem contineat ſemel, & plures eius partes aliquotas, quæ ſimul ſumptæ non conſtituant* unam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt. Diuiditur primo proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes unam, conficitur proportio superbipartiens; si três partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c. Diuiditur deinde quodlibet horum generum, habita ratione partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarũ maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quod si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus undecimis, appellabitur superdecupartiens undecimas; Quod si decem illæ partes sint decimætertiæ, uocabitur proportio superdecupartiens decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus. Ne autem proportiones superpartientes uel inter se cõfundantur, uel cum proportionibus superparticularibus, diligenter consideranda sunt ea, quæ sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunq; proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter commonstrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore supersint; alter uero, quotæ partes, aut quãtæ sint, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotan-

denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorẽ, & adhuc tres eius partes aliquotas; posterior autem ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione superpartiente duos prædictos numeros, qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, eiusmodi eße debere, ut non habeant ullam partem aliquotam communem, præter unitatem, quæ quidem est omnium numerorũ pars aliquota. Tales sunt duo prædicti numeri 3. & 8. Nam sola unitas, ut constat, est utriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habent præter unitatem aliã cõmunẽ mensurã, uidelicet 3. Nã ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senariũ metitur. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cũ maior quãtitas cõtineat semel minorẽ, & eius partẽ dimidiã. Eadẽ rõne nõ recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiẽs sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habẽt 2. cõem partem aliquotã, præter unitatem; atq; ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cũ maior quãtitas cõtineat minorẽ semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur nõ difficile erit unicuiq; denominare cõuenienter oẽs proportiones superpartiẽtes. Perspicuũ ẽt ex dictis relinquitur, cur proportionẽ superpartientẽ diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem

tertias,

tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrētur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter unitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica edocetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

PROPORTIO multiplex superparticularis, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, uel quater, &c. continet, & præterea unam eius partem aliquotam; cuiusmodi est proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, utpote cum dupla) & insuper comprehendunt unitatem, quæ est quarta pars minoris; qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ eadem proportio proposita similis est. Diuiditur autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita. Veluti multiplex, in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper unam partem minoris quantitatis aliquotam. Vnumquodque rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio tripla superparticularis, continet sub se triplam sesquialteram, (ut quando maior quantitas minorem

rem ter continet, & præterea dimidiam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

PROPORTIO *denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes unam: qualis est proportio* 11. *ad* 3. *Dixi, non conficientes unam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ unam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis:* Vt *proportio* 20. *ad* 6. *non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis* 20. *contineant ter* 6. *& duas sextas; quia duæ sextæ conficiunt unam tertiam partem: Quare uocabitur proportio tripla sesquitertia. Distribuitur autem hæc proportio primò, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c.* Deinde *quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita.* Vt *sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c. Postremo quæuis istarum, habita ratione partium aliquotarũ, in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens, diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.*

OMNIA *uero, quæ dicta hactenus sunt de quinque his generibus proportionum rationalium maioris in-*

inæqualitatis, intelligenda ſunt quoq; de quinque generibus correſpondentibus minoris inæqualitatis, præmiſſa tamen ſemper præpoſitione (ſub,) ut dictum eſt. Nam ſi in exemplis adductis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias: Ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

CAETERVM ex dictis perſpicue colligitur, nõ poſſe plura eſſe genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam expoſita. Cum enim, ut Euclides demonſtrat propos. 5. lib. 10. commenſurabiles quantitates quæcunque, inter quas, ut diximus, eſt proportio rationalis, inter ſe proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, ut omnis proportio rationalis quarumcumque quãtitatum continuarum aſſignari, ſeu exhiberi poſſit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione conſtituitur proportio multiplex: aut ſemel tantummodo, ac præterea unam eius partem aliquotam; & ſic habetur proportio ſuperparticularis; aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes unam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & unam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque uero alio modo minor quantitas a maiore contineri poteſt. Eadem

ratione

ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis.

QVONIAM *uero non exiguus est usus denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, a quibusnã numeris singulæ proportiones denominentur.* Denominator *ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distincte, & aperte habitudinem unius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ, est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ, est* $1\frac{1}{5}$*; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, ut arbitror, quod Euclides in lib. 6. & cæteri Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius, quia denominator, ut diximus, ostendit, quanta sit una quantitas ad alteram, cum qua confertur, ut ex propositis exemplis constat.*

Ex *dictis autẽ facile colligi potest denominator cuiusq; proportionis.* Denominator *.n. proportionis multiplicis, quæcunque ea sit, est numerus integer; quia maior quantitas aliquoties minorem debet continere. Vt proportionis duplæ denominator, est 2. Noncuplæ 9. Centuplæ 100. millecuplæ 1000. &c. Denominatores autem proportionũ submultipliciũ multiplicibus correspõdentiũ, sũt partes aliquotæ a dictis denominatoribus denominatæ:* Vt *denominator proportionis subdu-*

ſubduplæ, eſt $\frac{1}{2}$; ſubnoncuplæ, $\frac{1}{9}$: ſubcentuplæ, $\frac{1}{100}$: ſubmillecuplæ, $\frac{1}{1000}$; Denominator autẽ proportionis ſubquintuplæ eſt $\frac{1}{5}$. Eodẽ modo & denominatores aliarũ proportionum ſubmultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuſcunque proportionis ſubmultiplicis, eſt numerus fractus, cuius numerator perpetuo eſt unitas; denominator autem, numerus proportionem multiplicem correſpondentem denominans, ut ex dictis exemplis patet.

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis ſuperparticularis, eſt unitas cum parte una aliquota: quoniam maior quantitas debet minorem ſemel tantum, & unam eius partem aliquotam comprehendere. Vt proportionis ſeſquialteræ denominator, eſt $1\frac{1}{2}$; ſeſquioctauæ, $1\frac{1}{8}$; ſeſquimilleſimæ, $1\frac{1}{1000}$, &c.* Denominatores autem proportionum ſubſuperparticularium correſpondentium, ſunt fractiones, quarum numeratores una tantum unitate minores ſunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis ſubſeſquialteræ, eſt $\frac{2}{3}$; ſubſeſquioctauæ, $\frac{8}{9}$; ſubſeſquimilleſimæ, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, & pro eiuſdem fractionis denominatore, numerus unitate maior: Vt denominator proportionis ſubſeſquidecimæ eſt $\frac{10}{11}$, &c.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis ſuperpartientis, eſt unitas cum pluribus partibus aliquotis non efficientibus unam: quia maior quantitas debet ſemel tantum minorem continere, & plures eius partes. Vt denominator proportionis ſupertripartientis*

tis ſeptimas, eſt $1\frac{3}{7}$; *ſupertripartientis uigeſimas*, $1\frac{3}{20}$; *&c.* Denominatores *autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot unitatibus minores ſunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem ſuperat. Vt denominator proportionis ſubſupertripartientis ſeptimas, eſt* $\frac{7}{10}$; *ſubſupertripartientis uigeſimas*, $\frac{20}{23}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſub ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, cui ſi addatur numerus partium, habebitur eiuſdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis ſubſuperquadripartientis undecimas, eſt* $\frac{11}{15}$; *Denominator autem proportionis ſubſupertripartientis quintas eſt hæc fractio* $\frac{5}{8}$. *Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum ſubſuperpartientium denominatores.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis multiplicis ſuperparticularis, eſt numerus cum una parte aliquota: quia maior quantitas continere debet minorem aliquoties, & inſuper unam eius partem aliquotam. Vt denominator proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ, eſt* $3\frac{1}{7}$. *Quintuplæ ſeſquinonæ*, $5\frac{1}{9}$, *&c. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium ſuperparticulariũ, ſunt fractiones, quarũ numeratores numeri ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, eſt* $\frac{7}{22}$; *ſubquintuplæ ſeſquinonæ*, $\frac{9}{46}$; *etc. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, qui ſi multiplicetur per denominatorem proportionis multipli-*

multiplicis, addaturque unitas numero producto, habebitur denominator eiusdem fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{25}$, *&c.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus cum pluribus partibus aliquotis, non constituentibus unam: quoniam maior quantitas minorem debet aliquoties comprehendere, & eius plures partes aliquotas non facientes unam. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est* $3\frac{5}{8}$; *quadruplæ superbipartientis quintas,* $4\frac{2}{5}$, *&c.* Denominatores *uero proportionum submultiplicium superpartientiū, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquincupartientis octauas, est* $\frac{8}{29}$: *subquadruplæ superbipartientis quintas,* $\frac{5}{22}$, *&c.* Inuenietur autem *denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est* $\frac{13}{34}$, *&c.*

DENOMINATOR *denique proportionis æqualitatis, perpetuo est unitas: quia una quantitas debet alteram semel duntaxat continere.*

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία *plerisque autem latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas.*

Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus; habitudinem autẽ proportionum, Proportionalitatẽ) a scriptoribus, præsertim Boetio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu harmonica: Verum Euclides de sola Geometrica agit in hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis præcedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera uero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed uel antecedẽs tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

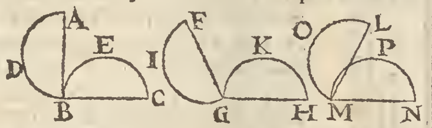
V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinē duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat proportionem, seu rationem; explicat nunc in hac 5. definitione, quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, ut proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitates, proportionē habent inter se, ut mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, ut alteram tandem superet; adeo ut si alterutra quamtumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circunferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circunferentiam superat, cum omnis circunferentia circuli, ut ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrū eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum, ad modum Lunæ nouæ, quādo falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic uero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, ut & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula & parabola maior eo quadrato,

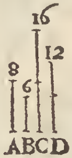
20. primi.

drato. Hoc idem demonstratur a Proclo in angulis rectilineis, ac curuilineis. Ostendit enim, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describantur A D B, B E C.



Quoniã igitur anguli semicirculorum A B D, C B E, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, toti angulo recto A B C, æqualis. Similiter ostẽdes, angulum curuilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; nec non curuilineum O M P, acuto L M N, idummodo hic ab angulis semicirculorum L M O, N M P, auferas communẽ angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P; Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum, posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At uero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, ullam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiã minimo: ceu propos. 16. lib. 3. demõstrauimus. Itaque ut apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, uoluit hac definitione, eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, ut alterutra multiplicata, alteram possit superare, alias non. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare unam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus.

PERSPICVVM *est ex his, quam inepte, & quam falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem duæ quæcunque* *propositæ quantitates habeant. Itaque ut inquit, uult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habebunt magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æquemultiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. ubi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quã illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B; Est ergo sensus huius definitionis ille, quem expressimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.*



VI.

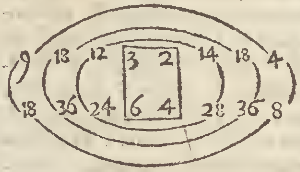
IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundã, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrunque ab utroque uel una deficiunt, uel una æqualia sunt, uel una excedunt; si ea sumãtur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc in loco Euclides, quasnam conditiones requirant apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut rectius exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam

quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quod si iam inter se conferantur sumpta æquæ multiplicia ea, quæ inter se respondent, ut multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est E, & G; Item multiplex tertiæ & multiplex quartæ inter se, hoc est F, & H; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se se habere, ut si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H; Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quam H; (quod est utrumque ab utroque vel vna deficere, uel una æqualia esse, uel una excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, idest, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & ut nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique ut nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æque multiplicia quæuis accepta, perpetuo se se ita habere; vt dictum est, dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G; non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, ceu in defin. 8. fiet perspicuum.

ITAQVE vt demonstratione aliqua concludantur quatuor

tuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cũ quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionẽ, concedatur quoque necesse est, qualibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus conditionem Debẽt enim definitio & definitũ reciprocari. Vt autem perspiciatur, quonã pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionem habentibus, quædã æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, a quibuslibet æquæ multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, utrunque ab utroque una deficiant; alia uero vna æqualia sint; alia denique una excedant, si ea sumantur, quæ inter se respondẽt; placuit vnum exemplum adducere in numeris. Sint enim quatuor numeri 3. 2. 6. 4. sumanturque primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æquemultiplices, ut septupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij a 28. multiplice quarti.

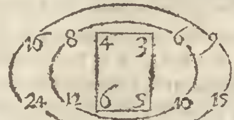


Rursus primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nimirum sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij æquæ multiplices, ut noncupli 18. & 36. Vides ergo, ta 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus in quacunque sumantur multiplicatione semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.

CAMPANVS vero atque Orontius, longe aliter definitionem

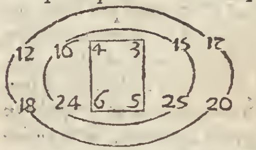
tionem hanc exponunt, Dicunt enim Euclidem uelle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æque multiplicibus, utrumque ab vtroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione; uel una æqualia sunt, vel vna excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Clarius, ut ait Campanus, quando earũ æque multiplicia proportionalia sunt, id est, cũ eandẽ proportionem habet multiplex primæ ad multiplex secundæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non uidet, si ita intelligatur definitio, Euclidem idẽ per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides uult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplicia eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est; ueluti eo in loco demonstrabimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, ut proprijs in locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, ut exposuimus, ita ut, propositis quatuor magnitudinibus in eadem proportione, si multiplex primæ deficit a multiplici secundæ, uel æquale sit, uel excedat; etiam multiplex tertiæ deficiat a multiplici quartæ, uel æquale sit, uel excedat, quicunque sit ille defectus, excessusve. Nam in 4. postea Theoremate demonstrabitur, dictum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nã si de quocumque intelligeretur, essent quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadẽ proportione. Si enim primi & tertij, vtpote 4. & 6. sumantur æque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti, nempe 3. & 5. æque multiplices, ut dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secun-



 di, quam

di, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemq; cernitur si primi, & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. secundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, vt æque multiplicia accepta una excedant se se quomodocumque, & non requiritur, ut proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3, quæ est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non se se excedant proportionaliter, ut constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamuis enim numeri æque multiplices adducti se se vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si enim primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quincuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, sed deficiet. Quod si primi, & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secundi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici secundi; At uero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur qualibet æque multiplicia dictorum numerorum sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æque multiplicibus ita esse contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionē, ut adhuc clarius constabit ex 8. definitione.



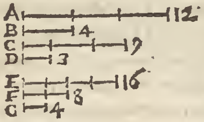
CAETERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, si modo secunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcumque sumpta ad 9. & 6. uel vna deficiunt ab æque multi-

multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. uel æqualia ſunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales uocentur.

VT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur dictæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales cõtinue, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales ſunt non continue, ſed diſcrete, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum eſt in 4. definitione.



VIII.

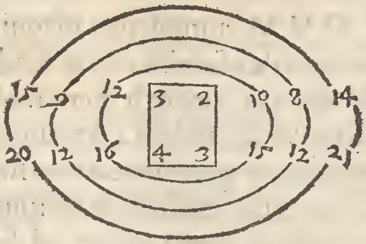
CVM uero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ut maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartã, dicens.

dicens. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprehēsumq́; fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplici secundæ, multiplex autem tertiæ non esse maius multiplici quartæ, sed uel minus, uel æquale; dicetur maior esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam: ut perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt triplicia E, & F, secundæ uero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H; Et quoniam E, multiplex primæ maius est quam G, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius non est quam H, multiplex quartæ, sed minus; idcirco maior esse dicetur proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ, ad D, quartam. Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quam tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamuis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque fieri, ut tā multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item ut & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ, uel minus est, uel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, vt perspicuum est in sequenti exemplo. Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, ut æque multiplicia earum, iuxta quasuis multiplicationes accepta, uel vna deficiant, uel una æqualia sint, uel una excedant, ceu in 6, defin. fuit expositum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex vero tertiæ non superet multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras multiplica-

tiones,

tiones, æque multiplicia primæ, ac tertiæ excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ. Quod si aliquando e contrario multiplex primæ deficiat a multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ; dicetur prima magnitudo ad secundam minorẽ habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamuis secundum plurimas multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.



IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.

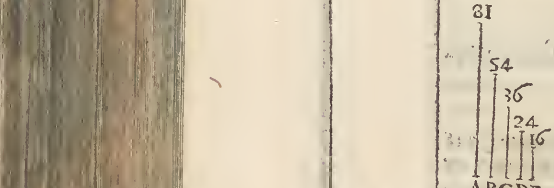
QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quã interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedens, & consequens, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duo antecedentia, ac duo consequentia. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines: At vero si fuerit continua, erunt cum minimũ tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscumque, solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X. CVM

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Sint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E. Proportio igitur A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; vt proportio A, ad B; & B, ad C. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, nimirum proportio A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B; propterea quod quatuor proportiones interiiciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.



Qvod ſi e contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D: At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoq; proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTER-

INTERPRETES *nonnulli colligunt ex hac definitione; si proponantur aliquot quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Nec enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionē primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperiantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quā habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, ut diximus. Non autem, illam duplam esse huius, intellexit, ne Theorema proponeret, quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potius sit quincupla? At vero, illam dici huius duplicatam, nemo inficiabitur, eo quod bis sit posita, & continuata proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor sit, hæc autem maior? Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius quinta pars. Quare & si proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio est einsdē dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, sit sedecupla, vt hic patet 16. 4. 1.*

ITAQVE *hoc in loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentium librorū percipiantur, rebusq; possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quæ nam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Quare cum ex propositione 20. lib. 6. constet, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita ut si prioris quadrati latus fuerit*

rit trium palmorum, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. ut in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur, sphæras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, ceu hic perspicitur 27. 9. 3. 1. &c.

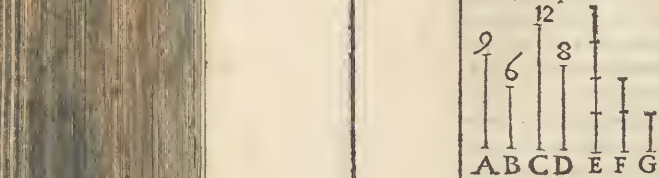
CAETERVM proposita quacumque proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio sedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus in dictum productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, ut hic uides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis,

portionis bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At uero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ proportionis denominatore ter posito, et sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic. 3. 3. 3. atq; ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater posito; Quincuplicata ex eodem quinquies posito, ac ita multiplicato, &c. Quocirca proportio duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapit naturam quodam modo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportio vero, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habet conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportio, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinet naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodũ etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmedicos, qui Algebræ regulam exposuerunt, &c.

XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes uero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionũ esse similitudinem. Docet iam, non solum in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologas ve, dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in *in quam plurimis demonstrationibus, quæ nam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quæ nam consequentia, ceu in 6. lib. perspicuum fiet.*



Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D; propter similitudinem enim proportionum, necesse est, utramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem esse vtrique consequenti, vel eodē modo maiorem, aut minorem; Alias non haberet vtraque antecedens ad vtranque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum uides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, ubi tam E, & F, homologæ sunt, quam F, & G, vt constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinū, nempe consequentium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat; in magnitudinibus uero non proportionalibus dissimiles.

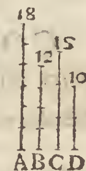
ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus uarie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; ceu in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. cōsideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi ex proportionibus

portionibus, quorum frequentiſſimus eſt vſus apud Geometras. Hi autem ſunt numero ſex. Primus dicitur proportio alterna ſiue permutata: Secundus, inuerſa, ſeu proportio e contrario: Tertius, compoſitio rationis, ſeu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuiſio rationis, uel diſiuncta proportionalitas: Quintus, conuerſio rationis, ſiue euerſa proportionalitas: Sextus denique uocatur proportio ex æqualitate, ſeu æqua proportio. Alterna igitur ſeu permutata proportio, inquit, eſt, cum propoſitis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandē eſſe proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem poſterioris, quam habet conſequens illius ad conſequentem huius. Vt ſi ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem eſſe proportionem A, ad C, quæ eſt B, ad D; dicemur argumētari a permutata proportione. Græci ſcriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt eſt A. ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, ſeu viciſſim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem eſſe huiuſmodi illationem, demonſtrabitur propos. 16. lib. huius.



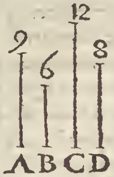
Cæterum in dicto modo argumentandi, neceſſe eſt, omnes quatuor magnitudines eſſe eiuſdē generis, ut inter binas vt ut aſſumptas proportio eſſe poſſit. Non enim recte infertur; Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, ut linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla ſit proportio lineæ ad numerum, aut contra, ut perſpicuum eſt ex defin. 5.

XIII.

INVERSA ratio, eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentē, uelut ad conſequentem.

VT ſi ex eo, quod eſt A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita eſſe B, ad A, ut D, ad C, hoc eſt, conſequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuerſa proportione. In hac argumentatione ſic fere loquuntur auctores. Vt eſt A, ad

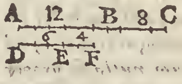
B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, uel e contrario, erit quoq; B, ad A, ut D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse unius generis, & posteriores alterius. Recte namque licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum; seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C.



XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

Sit proportio A B, ad B C, quæ D E, ad E F; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius A C, nempe antecedentis cum consequente, ad B C, consequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum consequente, ad E F, consequentem; Dicitur huiuscemodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, componendo ergo erit & A C, ad B C, ut D F, ad E F. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

Vt si dicatur, quæ proportio est totius A B, ad C B, ea est totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, excessus, quo antecedens cõsequentem superat, ad C B, consequentem, ut D F, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad F E, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.

A 12 C 4 B

D 6 F 2 E

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

Qvod si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo A B, ad C B, ita tota D E, ad F E; igitur ita etiam erit eadẽ A B, ad A C, excessum, quo cõsequentem superat antecedens, vt D E, ad D F; Dicemur proportionem conuertere. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionẽ rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus propos. 19. huius lib.

A 6 C 4 B

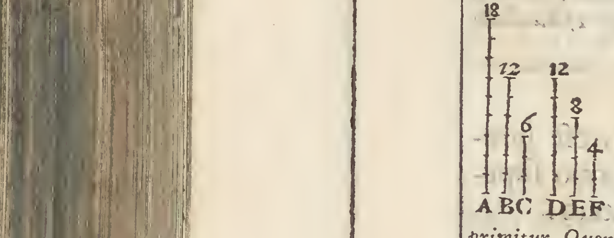
D 12 F 8 E

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidē D, E, F, sintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc est, A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Si igitur infera-tur, propterea eam esse proportionem A, ad C, primæ ad ultimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad ultimā in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis medijs, colliguñt habere unã, eandemq; inter se proportionem, ceu in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, sumendo binas ac binas magnitudines in eadem proportione, atque ordinate procedendo; altero vero, cum ordo inuertitur; fit ut duplex sit proportio ex æqualitate, non quidem ratione proportionis extremorum, sed ratione proportionis magnitudinum intermediarum. Id quod clarissime duæ sequentes definitiones explicant.

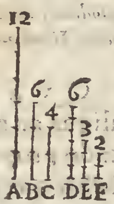


XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; Ideoque concludatur A, ad C, vt D, ad F; Di-

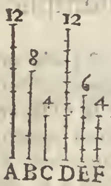
F; dicetur talis modus argumentandi ex æqualitate, ordinata proportio, quod in vtriſque magnitudinibus idem ordo in proportionibus ſeruetur. Hic autem modus demonſtratur propos. 22. huius lib.



XIX.

PERTVRBATA autem proportio eſt; cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs quæ ſint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI, ut ex æqualitate colligatur eadem proportio extremorum, ordo in proportionibus perturbetur, ita ut dicatur, quẽadmodum A, ad B, Ita E, ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B. conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibꝰ aliud quidpiã ad E, antecedentẽ magnitudinẽ; nuncupabitur huiuſcemodi modꝰ argumentandi ex æqualitate, Perturbata proportio, ꝙ nõ ſeruetur idẽ ordo in proportionibꝰ magnitudinum. Conſecutionem uero hanc ualidam eſſe, oſtendetur propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quã ordinata, ſemper infert ex æqualitate eandẽ extremorum proportionem, etiam ſi plures magnitudines ponantur, quam tres, ceu propos. 22. & 23. huius lib. perſpicuum fiet.



VTVNTVR Euclidis interpretes hoc in libro, & in alijs, ubi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate *quodam, quod ut hic subijceremus, non inutile fore iudicaui-mus. Illud autem eiusmodi est.*

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposi[ta] C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad pro-positam C. Non enim ex hoc absurdum ali[quod] consequitur, quamuis ignoremus interdum, quænam si[t] quarta illa magnitudo, quam sane esse posse, dubitandũ non est.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI sint quotcunq; magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero singulæ singularum æque multiplices; quã multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines A B, C D, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex A B, ipsius E, uel C D, ipsius F. Cum enim A B, C D, sint æque multiplices ipsarum E, & F; si A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipsi E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipsi F, æquales; erũt magni-

magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot sunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, erunt A G, C I, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo 2. pron.
erunt G H, & I K, simul, æquales ipsis E, & F, simul; Nec non H B, & K D, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, uel F, in C D, continetur, toties & E, F, simul, in A B, CD, simul comprehenduntur: Ideoque; quam multiplex est A B, ipsius E, tam sunt multiplices A B, CD, simul, ipsarũ E, & F, simul. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.

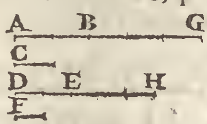
SCHOLION.

Hoc idem demonstrabitur vniuerse in omni genere proportionis, propos. 12.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cũ quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

SIT magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex D E, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cũ BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quã multiplex est D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartę. Cum enim A B, D E, sint æque multiplices ipsarum C, F; erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æqua

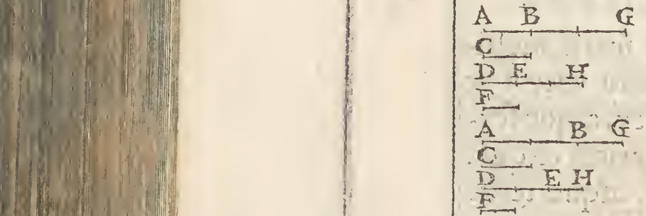


les, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erũt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi

F. Si igitur æqualibus multitudi-
2. pron. nibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H; erunt totę multitudines A G, D H, æquales. Quare toties cõprehẽditur C, in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex est AB, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ: Quinta vero & sexta, æquemultiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æquemultiplices fuerint secundæ, & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota A G, (prima, & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota DH, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, ceu perspicuum est in proposito schemate. Si uero tam prima & tertia, quam quinta, & sexta æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius existit, primam & quintam simul; atque tertiam & sextam simul, æque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.



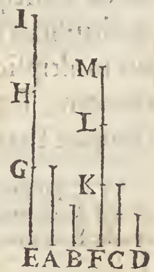
HOC quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis uniuersè propos. 24.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æquemultiplex, atque

atque tertia quartæ; ſumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

Sit prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt C, tertia quartæ D; ſumanturque E,& F, æque multiplices primæ & tertiæ A,& C. Dico ex æquo, tam multiplicem eſſe E, ipſius B, quam eſt F, ipſius D; Nã cum E, & F, ſint æque multiplices ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A ,& C, æquales, ut in E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt in F, æquales ipſi C. Quoniam uero E G, F K, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A , & C , æque multiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt G H , K L; Itẽ H I, LM, æque multiplices earundem B,& D. Quoniam igitur E G , prima magnitudo , tam eſt multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex F K , tertia quartæ D; Item G H, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quam multiplex eſt K L, ſexta eiuſdem quartæ D; Erit & E H , compoſita ex prima & quinta , tam multiplex ſecundæ B , quam eſt multiplex F L, compoſita ex tertia & ſexta , quartę D. Rurſus cum ſit E H, prima tam multiplex ſecundæ B , quam multiplex eſt F L, tertia quartæ D; ſit autem & H I,quinta,tam multiplex ſecundæ B , quam eſt L M , ſexta multiplex quartæ D; Erit & E I, compoſita ex prima & quinta , tam multiplex ſecundæ B, quam eſt F M , compoſita ex tertia ac ſexta , multiplex quartæ D . Eademque eſt ratio , ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex , atque tertia quartæ , &c. *2.quinti.*



Quod oſtendendum erat.

SCHO-

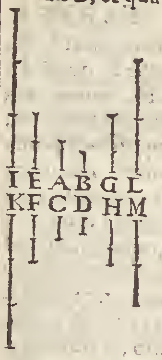
SCHOLION.

Ostendetur hoc theorema, propos.22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ binæ sumptæ eandem habent proportionem.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

Sit proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, secundæ B, & quartæ D, ęque multiplices G, & H, iuxta quãuis multiplicationem. Dico quoque esse ut E, multiplicem primæ ad G, multiplicẽ secundæ, ita F, multiplicem tertiæ ad H, multiplicem quartæ. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundę, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primę ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; sumptæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ; Item L, M, æque multiplices secundæ & quar-



3. *quinti.*

& quartæ; fit ut si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis sit ipsi L, etiam K, ipsi M, sit æqualis: & si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus ipsarum E, & F, nec non magnitudinum G, & H. Itaque cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque esse M, multiplici quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: Erit, ut E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum. *6.defin.5.* *6.defin.5.*

COROLLARIVM.

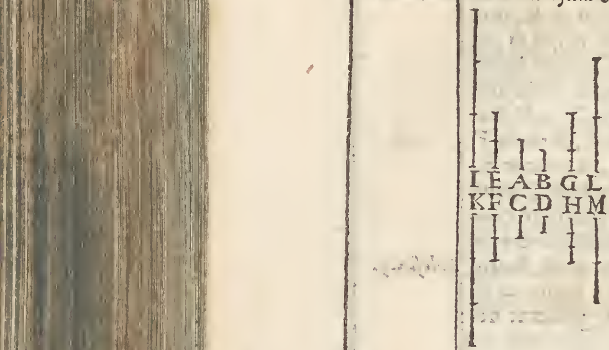
HINC manifestum est, si quatuor quantitates fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione, proportionales esse. Cum enim, propterea quod sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, ostensum sit, si I, multiplex primæ minor fuerit quam L, multiplex secundæ, uel æqualis, uel maior, etiam K, multiplicem tertiæ minorem esse, uel æqualem, uel maiorem M, multiplici quartæ; Perspicuum est; si e contrario L, maior fuerit quam I, uel æqualis, uel minor, etiam M, maiorem fore, uel æqualem, uel minorem, quam K, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si utraque I, K, minor est quam utraque L, M; erit contra utraque L, M, maior quã I, K, &c. Quare erit ut B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. *6.defin.5.*

SCHOLION.

ORONTIVS *quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, ut K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, ut F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est uitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstra-*

tur

tur conuerſum 6. definitionis, per conuerſum eiuſdem, atque idcirco idem per idem, quod eſt abſurdum; tum etiam, quia eodem modo ſtatim a principio licuiſſet illi inferre, ſic eſſe, per conuerſum 6. definitionis E, ad G, ut F, ad H, ſine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim eſt maior ratio in illis, quam in his. Reÿcienda eſt ergo huiuſcemodi demonſtratio, una cum expoſitione 6. definitionis, ut ſupra diximus. At iuxta noſtram interpretationem eiuſdem definitionis conſtat ſolum, ſi I, minor eſt, quam L, uel æqualis, uel maior, etiam K, minorem eſſe, uel æqualem, uel maiorem, quam M; quemadmodum & idem conſtat in æque multiplicibus E, F, G, H, ſi ſumantur, pro ut inter ſe reſpondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita eſſe E, primam ad G, ſecundam, ut eſt F, tertia ad H, quartam.

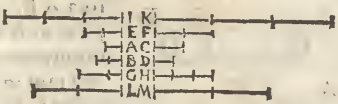


CAETERVM non uidetur hoc loco diſſimulandum Theorema quoddam antiquis mathematicis ualde familiare, quamuis a nemine, quod ſciam, ſit demonſtratum. Videlicet.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad ſecundam, & quartam magnitudines, eandem habebunt rationẽ: Necnon æque multiplices ſecundæ & quartæ ad primam & tertiam magnitudines. Et contra eandem rationẽ habebunt ſecunda & quarta, ad æque multiplices primæ & tertiæ; Necnon prima & tertia, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ.

SIT A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam; ſumanturque E, & F, æque multiplices ipſarum A, & C; Item G, & H, æque multiplices ipſarum B, & D. Dico ita eſſe E, ad B, ut F, ad D; Item G, ad A, ut H, ad C; Et e conuerſo,

uerso, ita esse B, ad E, ut D, ad F; Item A, ad G, ut C, ad H. Sumantur enim rursus ipsarum E, F, æque multiplices I, K; Item ipsarum G, H, æque multiplices L, M. Erũt igitur ex æquo, ut ante probatum est, 3. quinti.



I, K, æque multiplices ipsarum A, C; Item L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Quocirca si I, multiplex primæ A,
deficit a G, multiplici secundæ B, etiam K, multiplex tertiæ C, 6.defin.5.
deficiet ab H, multiplici quartæ, &c. Igitur erit ut E, prima
ad B, secundam, ita F, tertia ad D, quartam. Eodem modo 6.defin.5.
ostendetur, ut est G, ad A, ita esse H, ad C; Atque idcirco erit conuertendo, ut B, ad E, ita D, ad F; Item ut A, ad G, ita C, ad H.

Ex quo constat modus argumentandi, quo frequentissime vtuntur Geometræ, maxime Apollonius Pergæus, Archimedes, Theon, &c. Videlicet; Vt est A, ad B, ita est C, ad D; ergo ut duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius A, utpote E, ad B; ita quoque erit duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius C, quale est F, ad D. Item ut est A, ad B, Ita est C, ad D; igitur ut A, ad duplum uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius B, nempe ad G; ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, nimirum ad H.

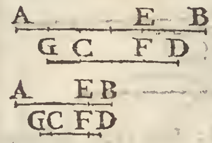
THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

Ita multiplex sit tota A B, totius C D, ut est multiplex A E, ablata ablatę C F: Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reliquæ C D, ut est tota A B, totius C D. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis uidelicet

delicet ipsius G C; ut est A E, ipsius C F. Quoniam igitur A E, E B, æque sunt multiplices ipsarum C F, G C; erit

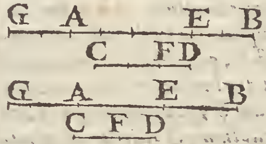
1. *quinti.*



tota A B, totius G F, ita multiplex, ut A E, ipsius C F, hoc est, omnes omnium, ut una unius. Sed tam multiplex ponitur A B, ipsius C D, quam est multiplex A E, ipsius C F; Igitur A B, tam est multiplex ipsius G F, quam ipsius C D; atque idcirco æquales sunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipsius F D, quam multiplex est ipsius G C. Sed ita multiplex posita fuit E B, ipsius G C, ut A E, ipsius C F, hoc est, ut tota A B, totius C D. Quare tam multiplex est reliqua E B, reliquæ F D, quam est tota A B, totius C D: quod est propositum.

Aliter. Sit ita multiplex tota A B, totius C D, ut ablata A E, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquę F D, esse sic multiplicem, ut est tota toti. Posita enim G A, ita multiplici ipsius F D, ut est A E, ipsius C F; erit tota G E, sic multiplex totius C D, ut A E, ipsius C F.

1.. *quinti*



Sed ita quoque multiplex est A B, eiusdem C D, ut A E, ipsius C F, ex hypothesi: Aeque multiplices sunt igitur G E, A B, ipsius C D, atque adeo inter se æquales. Quare dempta communi A E, æquales erunt G A, E B; Ideoque ęque multiplices ipsius F D, cum G A, sit multiplex posita ipsius F D: Atqui ita est multiplex posita G A, ipsius F D, ut A B, ipsius C D; Igitur & E B, reliqua sic erit multiplex ipsius F D, reliquæ, ut A B, tota totius C D; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis ęque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

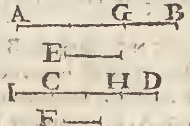
Vniverse idipsum demonstrabitur propos. 19. *in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, &c.*

THEOR

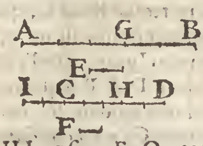
THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdē aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

SINT AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG; erit reliqua GB, uel æqualis ipſi E, uel eius multiplex, alias inęqualis, uel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E; Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quàm CH, tertia quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartę F; erit AB, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, ut HI, tertia cum ſexta, quartæ F; Atqui CD, ipſius F, erat quoque tam multiplex quā AB, ipſius E; Aeque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F; Ideoque æquales inter ſe. Quare dempta CH, communi, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. quod eſt propoſitum. *2. quinti.*



SIT ſecundo GB, multiplex ipſius E; Dico ita quoque eſſe multiplicem HD, ipſius F. Poſita namque CI, ita multiplici ipſius F, ut eſt multiplex GB, ipſius E, erit, ut prius AB, ita multiplex ipſius E, ut HI, ipſius F. Quare iterum equales erunt HI, CD, atque adeo reliquæ CI, HD; *2. quinti.*



H D; sed C I, est ita multiplex ipsius F, ut G B, ipsius E, ex hypothesi. Igitur & H D, tam multiplex erit ipsius F, quam G B, ipsius E, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

Hoc quoque ostendemus uniuerse propos. 24. in omni genere proportionis.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

Sint duæ A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C; Item C, ad A, & B. Sumantur D, E æque multiplices ipsarũ æqualium A, B, eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, utcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sũt, fit ut utraque uel minor sit, quam F, uel æqualis, uel maior, iuxta quãcunque multiplicationẽ id fiat.

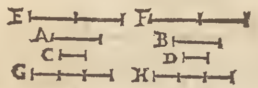
Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplici secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinũ, &c.) uel æquales, uel maiores; Erit ea proportio primæ A, ad C, secundã,
6. defin. 5. quæ teetiæ B, ad C, quartam. Eodem pacto ostendemus F, uel minorem esse utraque D, E, uel utrique æqualẽ, uel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat a D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B; uel una æqualis sit, uel maior; Erit quoque ea proportio
6. defin. 5. primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartã B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per

per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iám sit esse A, ad C, ut B, ad C, erit contra C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem; Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neq; enim per demonstrationem constat, utranque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; sed solum, cũ illæ sint æquales, utramque esse uel minorem, uel æqualem, uel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt.

EODEM fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C, & D, secundæ, & quartæ; Erũt tam E, & F, inter se æquales, quam G, & H, inter se, ut constat ex ijs, quæ in 1. lib. docuimus, cum axioma sextum explicaremus; quod E, & F, sint æqualium A, & B, æque multiplices, necnon G, & H, æque multiplices quoque æqualium C, & D. Quare si E, multiplex primæ deficit a G, multiplici secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplici quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam, ex defin. 5. Quod est propositum.



THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorẽ.

SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At e conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad A B; Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, ut sit reliqua E B; Vtraq; deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, ut G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quam D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed uel maior, uel æqualis. Quoniam igitur duæ F G, G H, æque multiplices sunt duarum

1. quinti. B E, E A; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, ut H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & A E: Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proxime maior sit, quam H G, nempe dupla. Quod si dupla, maior non fuerit quam H G, sumatur tripla, uel quadrupla, &c. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, non erit I L, maior, quam H G, (alias I K, non erit multiplex ipsius D, proxime maior quam H G; sed & I L, maior erit quam H G) & idcirco H G, erit uel æqualis ipsi I L, uel maior. Et quia F G, maior est posita quam D; L K, uero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K; Est autem H G, non minor, quã I L, ut demonstratũ est, sed uel æqualis, uel maior: Erit igitur tota F H, maior quam I K. Itaq; cum F H, H G, sint æque multiplices primæ A B, & tertiæ C; Atque I K, multiplex ipsius D, quę instar est secundæ & quartæ; sit autẽ F H, multiplex primæ, maior quã I K, multiplex secundę; At H G, multiplex tertiæ non sit maior, quã I K, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi (sumpta enim est I K, multiplex maior quã H G) erit maior proportio
8. defin. 5. A B, primę ad D, secundam, quã C, tertiæ ad D, quartam.

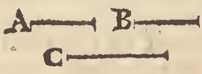
QVONIAM uero e contrario I K, multiplex primæ D, (ponitur

D, (ponitur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda, & A B, quarta) maior est quam H G; multiplex secundæ C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non est, quam F H, multiplex quartæ A B, immo minor, cum F H, maior sit, quam I K, ut ostensum est; Erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum. 8. defin. 5.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; sunt inter se æquales.

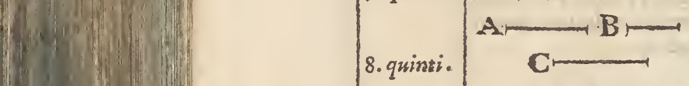
HABEANT primo A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera nempe A, maior & B, minor. Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quã B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat secundo C, eandem proportionem ad A, & B; Dico adhuc A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat. 8. quinti. 8. quinti.



THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

Habeat primo A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem eſſe, quam B. Si
7. quinti. enim A, foret ipſi B, æqualis, haberent A, & B, eandem pro-



portionem ad C; Si autem A, minor eſſet, quam B, haberet B, ma-
8. quinti. ior ad C, maiorem proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non eſt igitur A, æqualis uel minor quam C, ſed maior. Habeat ſecundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem eſſe, quam A. Non enim æqualis erit B, ipſi A; alioqui haberet C, ean-
7. quinti. dem proportionem ad A, & B; quod eſt contra hypotheſin. Neque uero B, maior erit quam A; alias haberet C, ad
8. quinti. minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiori: quod magis eſt contra hypotheſin. Minor igitur eſt B, quã A; quod eſt propoſitum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

Sint proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E,

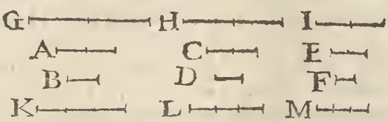
æque multiplices quęcunque G, H, I; & ad omnes conſequentes B, D, E, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, ut E, tertia ad F, quartam; fit, ſit, ut ſi G, multiplex primæ deficit a K, multiplici ſecundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplici quartæ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, uel maior, æqualis quoque ſit I, ipſi M, uel maior: ſed (ut eodem modo oſtendetur) ſi I, minor eſt, quam M, uel æqualis, uel maior, eſt quoque H, minor, quam L, uel æqualis, uel maior, propterea quod ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare ſi G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplici ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplici quartæ D; Et ſi G, æqualis eſt, uel maior quam K, etiam H, æqualis erit, uel maior quam L. Idemque oſtendetur accidere in quibuſcunque æque multiplicibus. Quapropter erit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum.

6.defin.5. *6.defin.5.* *6.defin.5.*

THEOR. 12. PROPOS. 12. — 12.

SI ſint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SINT quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc eſt, ſit A, ad B, ut C, ad D; & E, ad F. Dico ut eſt una antecedentium ad unam conſequentiũ, nimirum A, ad B; ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, C, E, ad omnes conſequentes ſimul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque

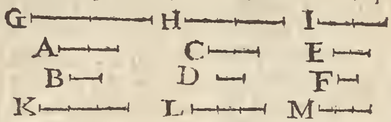


multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, erunt omnes G, H, I, ſimul omnium A, C, E, ſimul ita multiplices, ut una unius, nempe ut G, *1. quinti.*

 ipſius

ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipsius B. Quoniam uero ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut E, tertia ad F, quartam; fit ut si G,

6.defin.5.



multiplex primæ deficit a K, multiplici secundæ, deficiat quoq; H, multiplex tertiæ ab L, multiplici quartæ, & I, ab M; Et si G, æqualis est ipsi K, uel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, uel maior. Quare si G, minor est, uel æqualis, uel maior quam K, erunt & omnes G, H, I, omnibus K, L, M, minores, uel æquales, uel maiores. Quocirca ut est A, pri-

6.defin.5. ma ad B, secundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quart. Si sint itaq; magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

13.

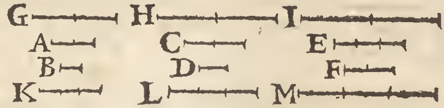
THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia uero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B; secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D,

6.defin.5. quartam; sit ut si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, mul-

L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando 8.defin.5.
erit, aliquando minor, qđ maior po-



natur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M. Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, 8.defin.5. quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.

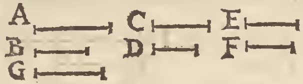
SCHOLION.

QVOD ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, ſextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quam E, quintæ ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quam E, ad F, hoc eſt, proportio E, ad F, maior quam C, ad D; fit ut ſi I, excedit ipſam M, non ne- 8.defin.5. *ceſſario H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, uel ei æqualis ſit. Sed ſi H, deficit ab L, uel ei æqualis eſt, etiam G, defi-* 8.defin.5. *ciet a K, uel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceßario G, excedet ipſam K; atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, ſecundam, quam A, tertiæ ad B, quar-* 8.defin.5. *tam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F, quod eſt propoſitum.*

EODEM modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

QVOD ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundã, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

SIT ꝑportio A, ad B, maior, quã C, ad D; & C, ad D, maior, quã E, ad F. Dico proportionem A, ad B, maiorem quoque eſſe, *quam E, ad F. Sit enim ut C, ad D, ita G, ad B, ita ut A, ad B, maiorem habeat rationem, quam G, ad B. Quo posito, erit ratio*



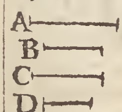
13. *quinti.* *G, ad B, maior quam E, ad F; Cum igitur ratio A, ad B, maior sit quam G, ad B; multo maior erit ratio A, ad B, quam E, ad F.*

Iam vero, si proportio A, ad B, minor fuerit, quam C, ad D; & C, ad D, minor, quam E, ad F; demonstrabimus, per ea, quæ in hoc scholio ostensa sunt, proportionem G, ad B, minorem esse quam E, ad F. Cum ergo proportio A, ad B, minor sit quam G, ad B; erit multo minor proportio A, ad B, quam E, ad F.

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima uero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si uero minor, & minor erit.

Sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D; Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D; Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primo A, maior quam

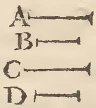


8. *quinti.* C, eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, ut ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam; Maior quoque erit

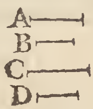
13. *quinti.* proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sex-

B, sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D, quod est propositum. 10. *quinti*.

Sit secundo A, æqualis ipsi C, eritque idcirco A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; Ideoque æquales erunt B, & D, quod est propositum. 7. *quinti*. 11. *quinti*. 9. *quinti*.



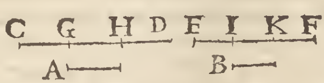
Sit tertio A, minor quam C, eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem: Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam; Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandē habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum. 8. *quinti*. 13. *quinti*. 10. *quinti*.



THEOR. 15. PROPOS. 15. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

Sint partium A, & B, æque multiplices C D, & E F. Dico ita esse C D, ad E F, ut A, ad B. Cum enim C D, & E F, sint æque multiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidatur ergo C D, in partes C G, G H, H D, æquales ipsi A; & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipsi B; eritque C G, ad E I, ut A, ad B, ex scholio propos 7. huius lib. quod C G, & A, æquales inter se sint, nec non E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K; & H D, ad K F, ut A, ad B; Ideoque



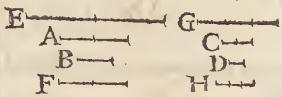
11. *quinti.* B; Ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionẽ. Quocirca ut CG, ad EI, hoc est, ut A, ad B, ita erit CD, ad EF, nempe omnes

12. *quinti.* CG, GH, HD, simul, ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaque cũ pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

16. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erũt.

SIT A, ad B, ut C, ad D. Dico uicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, ut B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, æque multiplices E, F; Item ipsarum C, D,
15. *quinti.* æque multiplices G, H; eritque E, ad F, ut A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F; & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad



11. *quinti.* B; erunt & ipsæ inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F; & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D, erunt & ipsæ eædem inter se, hoc est, ut est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare si E,
14. *quinti.* maior est quam G, uel æqualis, uel minor, erit quoque F, maior quam H, uel æqualis, uel minor, in quacunque mul-
6. *defin.* 5. tiplicatione. Est igitur A, prima ad C, secundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his una deficiant, uel una æquales sint, uel una excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

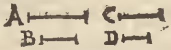
SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc & illud demonstrabitur.

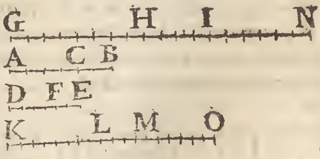
Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima uero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sit enim ut A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorẽ esse quarta D; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Erit enim permutando, ut A, ad C, ita B, ad D. 16. quinti. *Quare si A, maior est, quam B, erit* 14. quinti. *& C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.*



THEOR. 17. PROPOS. 17. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines AB, CB, & DE, 

FE, proportionales, hoc est, AB, ad CB, ut DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiãtur eodem ordine GH, HI, KL, LM; eritque GI, ita multiplex ipsius AB, ut est GH, ipsius AC, 1. quinti. hoc est

hoc est, ut K L, ipsius D F; sed ut est multiplex K L, ipsius D F, ita quoque multiplex est K M, ipsius D E. Aeque
1. *quinti.*
multiplices ergo sunt G I, K M, ipsarum A B, D E: Capian tur rursus I N, M O, æque multiplices ipsarũ C B, F E. Quoniam igi tur sic est multiplex H I, prima secundæ C B, ut L M, tertia quartæ F E; Itẽ tã est multiplex I N, quinta secundæ C B, quã M O, sexta quartæ F E;

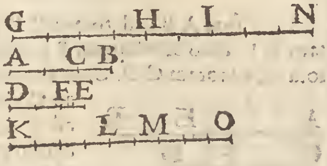
2. *quinti.* erit & H N, sic multiplex secundæ C B, ut L O, multiplex est quartæ F E. Itaque cum sit A B, prima ad C B, secundam, ut D E, tertia ad F E, quartam; sumptæque sint æque multiplices primæ ac tertiæ; Item secundæ & quartæ; sit ut si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici secundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab L O, multiplici quartæ F E; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Deficiat nunc G I, ab H N, & K M, ab L O. Ablatis ergo communibus H I, L M, deficiet quoq; G H, ab I N, & K L, ab M O. Quod si G I, æqualis fuerit ipsi H N, & K M, ipsi L O, erit & G H, æqualis ipsi I N, & K L, ipsi M O. Et si G I, excesserit ipsam H N, & K M, ipsam L O; excedet quoque G H, ipsam I N, & K L, ipsam M O. Quam ob rem cum G H, K L, sumptæ sint æque multiplices primæ A C, & tertiæ D F; Item I N, M O, æque multiplices secundæ C B, & quartæ F E, ostensumq; sit, æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus
6. *defin.* 5. secundæ & quartæ uel una deficere, uel una æquales esse, uel una excedere; Erit A C, prima ad C B, secundam, ut D F, tertia ad F E, quartam. quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

18.
THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportio nales,

nales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

SINT diuisæ magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales, hoc est, A C, ad C B, ut D F, ad F E; Dico eas etiam compositas proportionales esse, ut A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumantur enim, ut prius, ipsarum A C, C B, D F, F E, æque multiplices G H, H I, K L, L M; Item ipsarum C B, F E, aliæ æque multiplices I N, M O; eruntque rursus G I,



1. quinti.

K M, ipsarum A B, D E, æque multiplices. Item H N, L O, ipsarum C B, F E, ceu in præcedenti Theoremate ostensum fuit. Quoniam uero ponitur esse A C, prima ad C B, secundam, ut D F, tertia ad F E, quartam; sumptæque sunt æque multiplices primæ ac tertiæ; Item secundæ & quartæ; fit ut si G H, multiplex primæ deficit ab I N, multiplici secundæ, etiam K L, multiplex tertiæ deficiat ab M O, multiplici quartæ; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Deficiat nunc G H, ab I N, & K L, ab M O: additis igitur communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N, & K M, ab L O. Quod si G H, æqualis fuerit ipsi I N, & K L, ipsi M O, erit & G I, ipsi H N, æqualis, & K M, ipsi L O: Et si G H, excesserit ipsam I N, & K L, ipsam M O, excedet quoque G I, ipsam H N, & K M, ipsam L O. Quoniam ergo si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici secundæ C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplici quartæ F E; & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit; erit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam: quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

2. quinti. — 6. defin. 5. — 6. defin. 5.

THEOR.

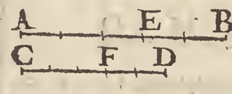
19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum; & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

SIT tota A B, ad totam C D, ut ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, esse ad reliquam F D, ut est tota A, ad totam C D. Cum enim sit A B, ad C D, ut A E, ad C F, erit & permutando A B,

16. quinti. ad A E, ut C D, ad C F. Diuidendo ergo erit E B, ad A E, ut

17. quinti. F D, ad C F: quare permutan-



16. quinti. do rursus erit E B, ad F D, ut A E, ad C F, hoc est ut tota A B, ad totam C D, cum posita sit A B, ad C D, ut A E, ad C F; Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur a conuersione rationis, iuxta 16. defin.

SIT enim A B, ad E B, ut C D, ad F D; Dico per conuersionem rationis esse quoque A B, ad A E, ut C D, ad C F; Cum enim sit

16. quinti. A B, ad E B, ut C D, ad F D; erit permutando A B, tota ad C D, totam ut E B, ablata ad F D, ablatam: ut igitur tota A B, ad totã C D,

19. quinti. ita A E, reliqua ad C F, reliquam. Permutando ergo rursus erit

16. quinti. A B, ad A E, ut C D, ad C F: quod est propositum.

20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quã tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, ta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sɪɴᴛ tres magnitndines A, B, C, & totidem D, E, F, ſitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F, ſit autem primo A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem F, ſexta. Cum enim A, maior ſit quam C, erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B; eſt autem ut A, ad B, ita D, ad E; maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B; At ut C, ad B, ita F, ad E; (Cum enim ſit B, ad C, ut E, ad F, erit conuertendo ut C, ad B, ita F, ad E,) maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E; Quare D, maior erit, quam F; quod eſt propoſitum.

8. quinti. *13. quinti.* *10. quinti.*

Sɪᴛ ſecundo A, æqualis ipſi C; Dico & D, æqualem eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C, æqualis, erit A, ad B, ut C, ad B; eſt autem ut A ad B, ita D, ad E; Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B; At ut C, ad B, ita eſt F, ad E, per inuerſam rationem, uti prius. Quare erit D, ad E, ut F, ad E; Ideoque æquales erunt D, & F; Quod eſt propoſitum.

7. quinti. *11. quinti.* *9. quinti.*

Sɪᴛ tertio A, minor quam C; Dico & D, minorem eſſe, quam F. Cum enim A, minor ſit quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; ſed ut A, ad B, ita D, ad E; Minor ergo proportio eſt D, ad E, quã C, ad B; Eſt autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E; Igitur minor eſt proportio D ad E, quam F ad E; propterea que D, minor erit quam F. Quod eſt propoſitum. Si ſint itaque tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod erat oſtendendum.

8. quinti. *10. quinti.*

THEOR.

21. THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quàm tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; Sitque earum proportio perturbata, hoc eſt, ſit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E; Sit autem primo A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem ſexta F. Cum enim

8. quinti. A, maior ſit quam C, erit maior proportio A, ad D, quam C, ad B; eſt autem ut A, ad B, ita E, ad F: Maior ergo proportio eſt E, ad F, quam C, ad B. Quoniam uero ut B, *4. quinti.* ad C, ita D, ad E, erit conuertendo ut C, ad B, ita E, ad F. Quare maior erit proportio E, ad F, quam E, ad D; *10. quinti.* Ideoque maior erit D, quam F; quod eſt propoſitum.

SIT ſecundo A, ipſi C, æqualis; Dico D, quoque ipſi F, eſſe æqualem. Cum enim A, ſit æqualis

7. quinti. ipſi C, erit A, ad B, ut C, ad B; ſed ut A, ad B, ita eſt E, ad F: Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F; eſt autem, ex inuerſa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, ueluti prius. Igitur erit ut E, ad F, ita E, ad D; atque idcirco D, ipſi *9. quinti.* F, æqualis erit: quod eſt propoſitum.

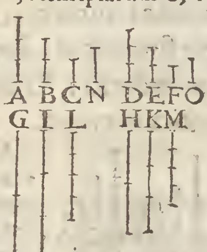
SIT tertio A, minor, quam C; Dico & D, minorem eſſe quam F. Cum enim A, ſit minor quam C, erit minor *8. quinti.* proportio A, ad B, quam C, ad B; Vt autem A, ad B, ita E, ad F: minor eſt ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam

Quoniam vero, vt ante, ex inuerſa ratione vt C, ad B, Ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F; quod eſt propo- 10. *quinti.* ſitum. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 22. PROPOS. 22. 22.

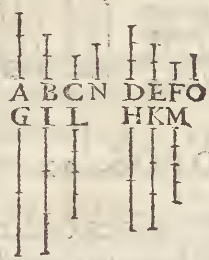
SI ſint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunq; magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, ſitq; A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, vt D, ad F; Sumptis enim ipſarum A, D, ęquemultiplicibus G, H; Item ipſarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipſarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam; erit quoq; G, multiplex primæ ad I, multiplicem 4. *quinti.* ſecundæ, vt H, multiplex tertiæ ad K, multiplicem quartæ. Eadem ratione, cum ſit B, prima ad C, ſecũdam, vt E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ ad L, multiplicem ſecundæ, vt K, multiplex tertiæ ad M, multiplicem quartæ.



Quoniam igitur ſunt tres magnitudines G, I, L, & alię tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione ſumuntur, fit vt ſi G, ſuperat ipſam L, ſuperet quoque H, ipſam M; Et ſi æ- 20. *quinti.* qualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaq; cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiãt vna ab L, M, æquemultiplicibus ſecũdæ C, & quartæ F, vel vna æqua

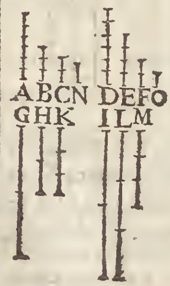
les sint, vel vna excedãt, in quacũq; multiplicatione; Erit A,
6. defin. 5. prima ad C, secũdã vt D, tertia ad F, quartã. qđ est ꝓpositũ.



QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiã C, ad N, vt F, ad O; Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cũ n. iã sit ostẽsum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur aũt C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadẽ rõne sumũtur: ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostẽsa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodẽq; modo idẽ ostẽdetur in quinq; magnitudinibꝰ, per quatuor; sicut id in quatuor demõstratũ fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaq; si sint quotcũq; magnitudines, &c. Quod erat ostendẽdũ.

23. THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæq; ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earũ proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoq; ex æqualitate esse vt A, ad C, Ita D, ad F. Sumptis .n. ipsarũ A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Itẽ ipsarũ C, E, F, æque-
15. quinti. multiplicibꝰ K, L, M; Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarũ A, B, æquemultiplices; At vt A, ad B, ita est
11. quinti. E, ad F: Igitur vt G, ad H, ita est E, ad F;
15. quinti. Sed vt E, ad F, ita est quoq; L, ad M, q(uod) L, M,

L,M, ſint ipſarũ E,F, æquemultiplices. Igitur erit vt G, ad H, ita L, ad M. Rurſus quoniã eſt B, prima ad C, ſecũdã, ut D, tertia ad E, quartã; erit quoq; ut H, multiplex primæ ad K, multiplicẽ ſecundæ, ita I, multiplex tertiæ ad L, multiplicem quartæ. Quia igitur ſunt tres magnitudines G,H,K, & aliæ tres I,L,M, quæ binæ in eadẽ rõne ſumũtur, eſtq; earũ proportio perturbata; fit ut ſi G, ſuperat ipsã K, ſuperet quoq; I, ipſam M; & ſi æqualis, æqualis; & ſi deficit, deficiat. Itaq; cũ G, I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, a K, & M, æquemultiplicibus ſecũdæ C, & quartæ F, uel una deficiant, uel una æqualia ſint, uel una excedant; erit ut A, prima ad C, ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam.

11. quinti.
4. quinti.
21. quinti.
6. def. 5.

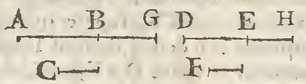
QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio perturbata, ut ſi fuerit A, ad B, ut F, ad O; & B, ad C, ut F, ad F; & C, ad N, ut D, ad E. Dico adhuc eſſe ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, ut E, ad O; Ponatur autem eſſe ita C, ad N, ut D, ad E; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quę binæ in eadem ſumuntur proportione, eſtq; perturbata earum proportio: Ergo rurſus ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, erit ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, ſicut id in quatuor fuit demonſtratum, per tres; Et ſic de pluribus. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

24.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

Sit A B, prima ad C, secundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, vt E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt



4. quinti. C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est A B, ad C, vt D E, ad F; & C,
22. quinti. ad B G, vt F, ad E H; erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad
18. quinti. E H: componendo igitur erit vt tota A G. ad B G, ita tota D H ad E H. Itaque cum rursus sit A G, ad B G, vt D H,
22. quinti. ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F; erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Eodem fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theorema sextum huius lib. demonstrauit in æquemultiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

Si duę magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionē, & detractæ quędam habeant ad easdem eandē proportionē: & reliquæ ad easdem eandē proportionē habebūt.

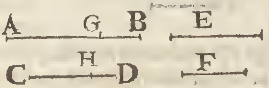
Habeant A G, D H, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit A G, ad C, vt D H, ad F. Item detractæ A B, D E, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem, ita vt sit quoque A B, ad C, vt D E, ad F; Dico & reliquas B G, E H, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse B G, ad C, vt E H, ad F. Cum enim sit vt A B, ad C, ita D E, ad F;
4. quinti. *erit conuertendo vt C, ad A B, ita F, ad D E. Quoniam igitur est A G, ad C, vt D H, ad F; & C, ad*
22. quinti. *A B, vt F, ad D E; erit ex æqualitate A G, ad A B, vt D H, ad D E.*
17. quinti. *Diuidendo ergo erit vt B G, ad A B, ita E H, ad D E,*
Itaq;

Itaque cum rursus sit B G, ad A B, vt E H, ad D E; & A B, ad C, vt D E, ad F; erit ex æquali B G, ad C, vt E H, ad F. 22. quinti. *Quod est propositum.*

THEOR. 25. PROPOS. 25. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT A B, ad C D, vt E, ad F, sitq; A B, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, simul esse maiores duabus C D, & E, simul. Auferatur enim ex A B, magnitudo A G, æqualis ipsi E; & ex C D, alia C H, æqualis ipsi F; Erit igitur A G, ad C H, vt E, ad F, hoc est, vt A B, ad C D.



Quare cum sit tota A B, ad totam C D, vt ablata A G, ad ablatam C H; erit quoq; vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua G B, ad reliquam H D. Est autem 19 *quinti.* A B, (cum sit omnium maxima) maior, quam C D: Igitur & G B, maior erit quam H D. Quoniam vero A G, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & C H; fient A G, & F, simul æquales ipsis E, & C H, simul. Additis igitur inæqualibus G B, & H D, fient A B, & F, simul maiores quam E, & C D, simul, cum G B, sit maior quam H D. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

NECESSE est autem, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam, ceu in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt A B, ad C D, ita E, ad F; & A B, maior quā E; erit quoq; C D, maior quam F. Item quia maior est A B, 14. quinti. *quam C D, erit quoque E, maior quam F. Quod si e contrario*

 antece-

antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neq; ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.

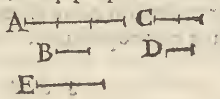
SIT vt A, ad B, ita B, ad C. Sit; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit, ut A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul, vt proxime demonstratum est, hoc est, quã dupla ipsius B. Quod est propositum.

HIC finem Euclides imponit quinto libro; Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, nec non in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autẽ traduntur de magnitudinib⁹ improportionalibus, quarum prima hæc est.

26. THEOR. 26. PROPOS. 26.

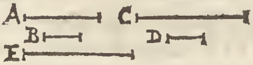
SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartã: habebit cõuertẽdo secũda ad primã minorẽ proportionẽ, quã quarta ad tertiam.

HABEAT A, ad B, maiorẽ proportionẽ, quã C, ad D. Dico proportionẽ B, ad A, minorẽ esse proportione D, ad C. Intel-

Intelligatur.n.esse E,ad B,vt C,ad D;eritq; proportio A,ad B,maior quoq; quã E,ad B; ac pro pterea A, maior erit quã E; Quare minor erit proportio B, ad A, ma- 10. quinti. 8. quinti.


iorẽ quã B,ad E,minorẽ;Sed ut est B,ad E,ita est conuertendo D,ad C. Igitur proportio B, ad 4. quinti.
A,minor est quoque,quam D,ad C;quod est propositum.

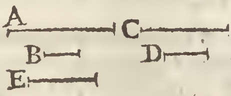
SCHOLION.

EODEM *fere modo demonstrabim⁹,si prima ad secũdã habuerit minorẽ proportionẽ,quã tertia adquartam, cõuertendo maiorẽ esse proportionẽ secũdæ ad primã,quã quartæ ad tertiã; dũmodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contra.*


SIT *enim minor proportio A, ad B, quã C,ad D. Dico conuertendo,B,ad A,maiorẽ habere proportionẽ,quã D, ad C.Intelligatur enim esse E,ad B,vt C,ad D;Eritq; proportio A, ad B,etiã minor,quã E,ad B;ac propterea A, minor erit, quã E.* 10. quinti.
Quare maior erit proportio B,ad A,minorẽ, quã B,ad E, ma- 8. quinti.
iorẽ.Sed vt B,ad E,ita est cõuertẽdo D, ad C.Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 27. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorẽ proportionẽ,quã tertia ad quartam:Habebit quoq; vicissim prima ad tertiã maiorẽ proportionẽ, quã secunda ad quartam.

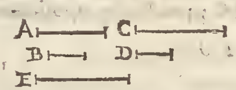
HABEAT A,ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorẽ esse quoque proportionem A, ad C,


quã B,ad D.Intelligatur nãq; esse E,ad B,ut C,ad D, eritq; proportio A,ad B,maior etiam quã E,ad B; Ideoq; A,ma- 10. quinti.
ior erit quam E. Quare maior erit proportio A, ad C, 8. quinti.
quam E, ad C: Quoniam vero permutando, est vt E,

 ad C,

16. quinti. ad C, ita B, ad D; (cum posita sit E; ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D, quod est propositum.

SCHOLION.



Similiter ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quã tertia ad quartam, vicissim primæ ad tertiã minorẽ esse proportionẽ, quã secundæ ad quartã.

Sit namq; minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quã B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; Ac propterea A, minor erit, quam E. Quare minor erit proportio A, ad C, quã E, ad C. Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoque erit, quam B, ad D. Quod est propositum.

28.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

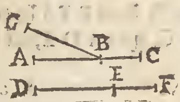
SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

Sit maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem esse proportionem A C, ad B C, quam D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, maior quoque, quam G B, ad B C; Ideoq; A B, maior

10. quinti. quam G B. Addita ergo communi B C,

BC, fiet A C, maior quam G C; maiorq; propterea erit proportio A C, ad B C, quam G C, ad B C; Sed componendo, 8. quinti
ut est G C, ad B C, ita est D F, ad E F; (quod posita sit GB, 18. quinti.
ad B C, vt D E, ad E F,) Maior ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F, quod est propositum.

SCHOLION.



Eadem ratione ostendemus, si proportio primæ ad secundam minor fuerit, quam tertiæ ad quartam, minorem quoque esse proportionem primæ & secundæ simul, ad secūdam, quam tertiæ & quartæ simul, ad quartam.

Sit minor proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo minorem esse proportionem A C, ad B C, quā D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque quam G B, ad B C;
ideoq; A B, minor erit, quam G B. Addita ergo communi B C, 10. quinti.
fiet A C, minor, quam G C; minorq; propterea erit propor- 8. quinti.
tio A C, ad B C, quam G C, ad B C. Sed componendo, vt G C, ad B C, ita est D F, ad E F. (quod posita sit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. quod est propositum.

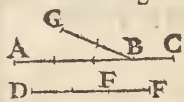
THEOR. 29. PROPOS. 29. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cū quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

Sit maior proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. Dico & diuidendo maiorem esse proportionē A B, ad B C,

quam

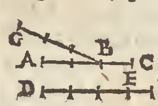
quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, ut
D F, ad E F; eritq; proportio A C, ad B C, maior quoque
10. quinti. proportione G C, ad B C; ideoq; maior erit A C, quam
G C. Ablata ergo cōmuni B C, maior erit A B, quam G B;
8. quinti. Ac propterea maior erit ꝓportio AB,



ad B C, quam G B, ad B C; sed diuidendo,
17. quinti. dendo, vt est G B, ad B C, ita est D E,
ad E F; (Posita namq; est G C, ad B C,
ut D F, ad E F,) Igitur maior quoq; erit proportio AB, ad
B C, quam D E, ad E F. quod est propositum.

SCHOLION.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam:



vt eodem modo potest ostendi, si modo vocem maioris vbiq; mutes in vocem minoris, & contra, ceu in præcedentibus factum est.

30. THEOR. 30. PROPOS. 30.

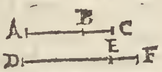
SI composita prima cum secunda, ad secūdam habuerit maiorem proportionem, quam cōposita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

SIT maior proportio A C, ad B C,
29. quinti. quā D F, ad E F. Dico per conuersionē

rationis, minorē esse proportionē A C,
ad A B, quā D F, ad D E. Cum enim sit
A C,

A C, ad B C, maior proportio, quam D F, ad E F; erit & diuidendo maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quare conuertendo minor erit proportio BC, ad AB, quam E F, ad D E; Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad AB, quam totius D F, ad D E. Quod est propositum. 29. quinti. 26. quinti. 28. quinti.

SCHOLION.



Non dissimili ratione ostẽdemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem primæ & secundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam: dummodo vbique pro voce maioris reponamus vocem minoris.

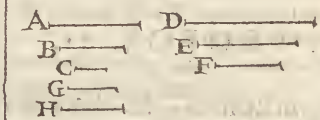
THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiã, quam primæ posteriorum ad tertiã.

Sint tres magnitudines A, B, C, & alię tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam D, ad E; Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut E, ad F; eritq; propterea ꝓportio B, ad C, maior quam G, ad C; Ideoq; B, maior quã G. Quare maior erit 10. quinti.
pro-

proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, maiorem; Ponitur autē proportio A, ad B, maior quam D, ad E: Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; Ideoq; A, ma-
8. *quinti.* ior erit, quam H. Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad
22. *quinti.* eandem C; Atqui vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F: (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) maior ergo proportio quoq; est A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLION.



Eadem ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F: Vel contra, si proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F, ceu in proposita figura cernere licet.

Non dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem.

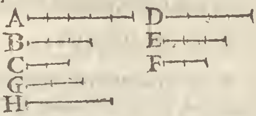
Quod si plures fuerint magnitudines tribus, ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quàm primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus.

32. THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ poste-

posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorũ ad tertiã.

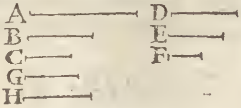
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritq; propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C;



Ideoq; maior erit B, quam G. 10. quinti.
Quare maior erit proportio 8. quinti.
A, ad G, minorem, quam eiusdem A, ad B, maiorem: est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; ideoq; maior erit A, quam H. 10. quinti.
Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionẽ, 8. quinti.
quam H, minor ad eandem C: At vt H, ad C, ita est ex æqualitate D ad F, (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; & 23. quinti.
vt E, ad F, ita est H, ad G,) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLION.

EADEM *ratione, si fuerit proportio A, ad* B, *quæ* E, *ad* F; *At* B, *ad C, maior quam D, ad* E: *Vel cõtra, si proportio A, ad B, maior quam* E, *ad* F; At



B, ad C, eadem, quæ D, ad E; *ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad* F, *vt in proposita figura perspicitur.*

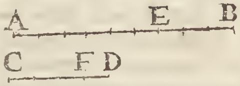
HAVD *secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum*

tudinū minores fuerint, etiā extremarū ꝓportionē eſſe minorē.
Qvod ſi fuerint plures magnitudines tribus, demonſtrabimus, maiorem quoque vel minorem eſſe proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ poſteriorum ad vltimā, ea arte, qua vſi ſumus propoſ. 23. &c.

33. ## THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

Sit maior proportio totius A B, ad totam C D, quam ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reliquæ E B, ad reliquam F D, maiorem eſſe, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim maior ſit proportio AB, ad CD,



quam A E, ad C F, erit quoque permutando maior pro-
27. quinti. portio AB, ad A E, quā CD, ad C F; ac propterea, per con-
30. quinti. uerſionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quā
27. quinti. C D, ad F D. Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc eſt, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D. quod eſt propoſitum.

Qvod ſi tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, ut ex modo demonſtrandi liquet.

34 ## THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI ſint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorū, quam

quam ſecundæ ad ſecundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam , & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul , maiorem proportionem, quam vltima priorum ad vltimam poſteriorum; Item maiorem , quam omnes priores , relicta prima, ad omnes poſteriores , relicta quoque prima; minorem autẽ , quam prima priorum ad primã poſteriorũ.

SINT tres magnitudines A,B,C, & aliæ tres, D, E, F; Sit aũt maior proportio A,ad D,quã B,ad E; Itẽ maior B, ad E,quã C,ad F. Dico ꝓportionẽ ipſarũ A,B C, ſimul,ad ipſas D,E,F,ſimul maiorẽ eſſe proportione C,ad F, & proportione ipſarũ B, C,ſimul,ad ipſas E, F, ſimul,minorẽ vero proportione A,ad D. Cũ.n.maior ſit proportio A,ad D,quã B,ad E; erit permutando maior A,ad B, quã D,ad E. Igitur cõponẽdo maior erit proportio ipſarũ A,B,ſimul ad B,quã ipſarũ,D, E, ſimul ad E: ꝑmutãdo ergo rurſus,maior erit proportio A, B,ſimul ad D,E,ſimul quã B,ad E. Itaq; cũ tota A,B,ad totã D,E, maiorẽ habeat ꝓportionẽ, quã ablata B, ad ablatã E;habebit quoq; reliqua A,ad reliquã D,maiorem ꝓportionẽ,quã tota A,B,ad totã D,E. Eadẽ rõne,maior erit ꝓportio B,ad E,quã totius B,C,ad totã E, F. Multo ergo maior erit ꝓportio A,ad D,quã B,C,totius ad totã E,F. Permutãdo igitur,maior erit ꝓportio A,ad B,C,quã D,ad E, F; & cõponẽdo ergo maior eſt ꝓportio totius A, B, C, ad B, C,quã totius D,E,F,ad E, F; Et rurſus ꝑmutãdo maior ꝓportio oĩum A,B,C,ſimul ad oẽs D,E,F,ſimul,quã B, C, ad E, F;qđ eſt ſecũdũ. Itaq; cũ ſit maior ꝓportio totius A, B,C,ad totã D,E,F,quã ablatæ B,C,ad ablatã E, F; erit & maior ꝓportio reliquæ A,ad reliquã D,quã totius A,B,C, ad totã D,E,F. qđ eſt tertiũ. Quoniam uero maior eſt proportio B, ad E, quam C , ad F; erit permutando maior

27. quinti.
28. quinti.
27. quinti.
33. quinti.
27. quinti.
28. quinti.
27. quinti.
33. quinti.
7. quinti.

quoque

quoque B,ad C,quam E, ad F; & componendo maior to-
28. quinti. tius B C,ad C,quam totius E,F, ad F; & rursus permutan-
27. quinti. do maior B C,ad E,F,quam C,ad F. Est autem maior pro-
portio A,B,C,ad D,E,F, vt ostendimus, quam B, C, ad E,
F. Multo ergo maior erit proportio omniũ A,B,C, ad om-
nes D,E,F quam vltimæ C,ad vltimã F; quod est primũ.

QVOD si fuerint quatuor magnitudines vtrobiq; circa
dẽ hypothesi, hoc est, si sit quoq; maior proportio C,ad F,
quã G ad H; eadẽ consequentur. Vt .n. iam in tribus est o-

stensum, maior est proportio
B,ad E,quã B,C,G,ad E, F,H;
Multo ergo maior erit A,ad D,
quam B,C,G,ad E, F, H. Per-
mutãdo ergo, maior erit A,ad
18. quinti. B,C,G,quam D,ad E, F, H; & componendo maior A,B,
C,G,ad B,C,G,quam D,E,F,H,ad E,F,H; & permutãdo
27. quinti. A,B,C,G,ad D,E,F,H,maior quã B,C,G,ad E,F,H, quod
est secundum. Itaq; cum sit maior proportio totius A, B,
C,G,ad totam D,E,F,H,quam ablatæ B,C,G, ad ablatam
33. quinti. E,F,H; erit & reliquæ A,ad reliquam D, maior proportio,
quam totius A,B,C,G,ad totam D,E, F, H; quod est ter-
tium. Quoniam vero vt in tribus est demonstratũ, maior
est proportio B C,G,ad E F, H, quam G, ad H; & maior
A,B,C,G,ad D,E,F,H,quam B,C,G, ad E, F, H, vt fuit
ostensum; multo maior erit proportio A,B,C,G,ad D,E,
F,H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est primum.
Eadem arte concludes,eadem consequi in quinque magni-
tudinibus per quatuor; & in sex per quinq;, & in septem,
per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per
tres. constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS
ELEMENTVM VI.

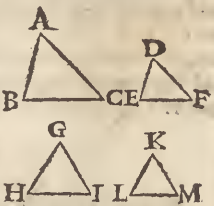
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habẽt, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula A B C, D E F, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit; Itẽ latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F; & ut AB, ad B C, ita DE, ad E F; & ut A C, ad C B, ita D F, ad F E.

QVOD si anguli unius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ similes. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas et æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes,



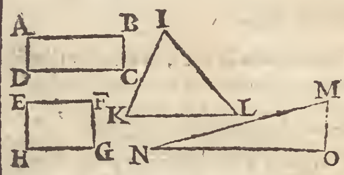
quamuis inter se maxime sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera G H I, K L M. Propter laterum enim æquali-

tatem, erit G H, ad G I, ut K L, ad K M; Item G H, ad H I, ut K L, ad L M; & G I, & I H, ut K M, ad M L, cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

Vt si in parallelogrammis A B C D, E F GH, latera AB, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, ut utrobique sit & antecedens, & consequens, diuersarum proportionum, hoc est, ut sit ea proportio A B, ad E F, quæ F G, ad B C; seu A B, ad F G, ut E F, ad B C; (utroque enim



modo A B, *est antecedens vnius proportionis &* B C, *consequens alterius, in figura* A B C D; *quemadmodum & primo modo* E F, *est consequens vnius, &* F G, *antecedens alterius; uel secundo modo* F G, *consequens, &* E F, *antecedens, in figura* E F G H, *) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula* I K L, M N O; *reciproca, si fuerit ut* I K, *ad* M N, *ita* M O, *ad* I L; *uel vt* I K, *ad* M O, *ita* M N, *ad* I L.

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum

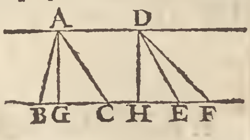
cum ut tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

Si linea recta quæuis A B, *ita diuidatur in* C, *inæqualiter, ut sit, quemadmodum tota* A B, *ad maius segmentum* AC, *ita* A C, *maius segmentum ad* CB, *minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub aliis uerbis iam docuit lib. 2. propos. 11. ut fiet perspicuum propos. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atque utilitates lineæ hoc modo diuisæ, ceu ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. ut non immerito a quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea est diuisa.*

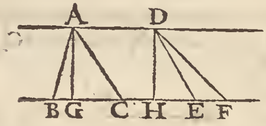
IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a uertice ad basin deducta.

Si a uertice A, *trianguli* A B C, *ad basin* B C, *perpendicularis ducatur* A G; *dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli* A B C; *ita ut tantam dicatur habere altitudinem dictum triangulum, quanta est perpendicularis* A G. *Sic etiam perpendicularis* D H, *ducta a* D, *uertice trianguli* D E F, *ad basin* E F, *ad partes* E, *protractam, appellabitur altitudo trianguli* D E F. *Vnde si duarum figurarum perpendiculares a verticibus ad bases, (siue hæ protractæ sint, siue non) demissæ fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem dictæ perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares* A G, D H, *triangulorum* A B C, D E F, *in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli* A G H, D H G,



interni ex eadem parte ſint duobus rectis æquales, immo duo
28.primi. recti; erunt rectæ A G, D H, parallelæ; ſunt autem & AD,



G H, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eiſdem eſſe parallelis conſtituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;
34.primi. ac propterea latera oppoſita AG, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicetur dicta triangula habere altitudinem. Quod ſi in eiſdem triangulis vertices ponantur C, & F, baſes vero A B, & D E; non habebunt eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad baſin D E, protractam æqualis non eſt perpendiculari ex C, ad baſin A B, deductæ, cum ne triangula ipſa in eiſdem parallelis poſſint conſtitui, vt manifeſtum eſt.

RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita eſt per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad baſin deducitur: quoniam, ut ſcribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente ſimplicio, in libro de dimenſione, menſura cuiuſcunque rei debet eſſe ſtata, determinataque & non indefinita: Inter oēs autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, ſicut & vulgus, omnia metiuntur, ſola linea perpendicularis certa eſt, determinatæque longitudinis, aliæ autem omnes infinitæ indeterminatæque. Qua de re plura ſcripſimus ad initium cōmentariorum, quos in ſphæram Ioan. de ſacro boſco edidimus.

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta ſit magnitudo antecedens ad conſequentem; (ut denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. oſtendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere conſequentem; denominator vero proportionis ſubqua-

subquadruplæ uidelicet $\frac{1}{4}$. *indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur in hac definitione Euclides, proportionem aliquam ex duabus, uel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu (ut uertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla & secupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem secuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producuntur eadem 12. denominator scilicet duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quincupla. Nam harũ denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.*

P o r r o *quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, ceu in quinto libro defin. 10. exposuimus: ita ut si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam, duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiã in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam, consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primo, inductione quadam Theonis Alexandrini, quã hoc in loco adducit, confirmabimus: Deinde uero idem duabus demonstrationibus, quarum una traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propos. 11.*

 Altera

altera autem a Vitellione lib. 1. propos. 13. suæ perspectiuæ, comprobabimus.

THEON igitur rem propositam ita conatur absoluere. Habeat A B, ad C D, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & C D, ad E F, eandem quoque datam. Dico quod ipsius A B, ad E F, ratio conflatur ex A B, ad C D; & ex C D, ad E F; uel quod ipsius A B, ad C D, rationis quantitas multiplicata in ipsius C D, ad E F, rationis quantitatẽ, efficit ipsius A B, ad E F, rationis quantitatem. Sit enim primum A B, quam C D, maior; & C D, quam E F: & sit quidem A B, ipsius C D, dupla, & C D, ipsius E F, tripla. Quoniam igitur C D, ipsius E F, tripla est, ipsius autem C D, dupla est A B; erit A B, ipsius E F, sexcupla. Quoniam simplum alicuius duplicamus, fit sexcuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam A B, dupla est ipsius C D, diuidatur A B, in ipsi C D, æqualia, hoc est, A G, & G B: & quoniam C D, ipsius E F, tripla est; æqualis autem est A G, ipsi C D; & A G, igitur ipsius E F, tripla est: Id propterea & G B, ipsius E F, tripla est. Tota igitur A B, ipsius E F, sexcupla est. Ipsius igitur A B, & E F, ratio connectitur per C D, medium limitem, composita ex ipsius A B, ad C D; & C D, ad E F, ratione.

SIMILITER autem, & si minor fuerit C D, utraque ipsarum A B, & E F, idipsum colligitur. Sit enim rursus A B, ipsius C D, tripla; At C D, ipsius E F, sit dimidia. Et quoniam C D, ipsius E F, dimidia est; Ipsius autem C D, tripla est A B; erit A B, sesquialtera ipsius E F. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam A B, ipsius C D, tripla est; & C D, ipsius E F, dimidia: qualium A B, æqualium ipsi C D, trium, talium est E F, duorum. Quare sesquialterum est A B, ipsius E F. Igitur ratio ipsius A B, ad E F, connectitur per C D, medium limitem, composita ex ipsius A B, ad C D; & C D, ad E F, ratione.

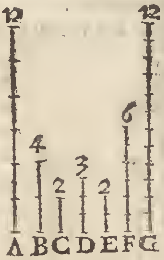
SED iam rursus sit C D, utraquẽ ipsarum A B, & E F, maior

maior; & sit quidem A B, *ipsius* C D, *dimidium, &* C D, *ipsius* E F, *sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est* A B; *duorum, talium est* C D, *quatuor; qualium autem* C D, *quatuor, talium* E F, *trium. Et qualium igitur* A B, *duorum, talium* E F, *trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius* A B, *ad* E F, *per* C D, *medium limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si a composita ratione quæuis vna compositarum auferatur, vno simplicium eiecto, reliqua compositarum assumetur.*

Hæc ad uerbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

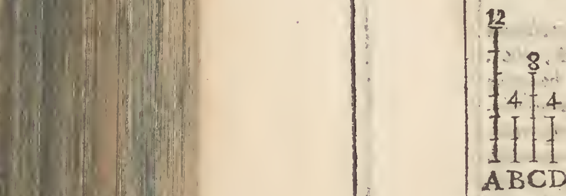
EVTOCII *uero demonstratio ita se habet.*

SINT *tres magnitudines* A, B, C. *Dico proportionem* A, *ad* C, *componi ex proportionibus* A, *ad* B; & B, *ad* C. *Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio; Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia* 12. *ad* 3. *habent proportionem quadruplam, idcirco* 3. *multiplicata in* 4. *producunt* 12. *&c. Sit igitur proportionis* A, *ad* B, *denominator* D; *proportionis vero* B, *ad* C, *denominator sit* E; & D, *multiplicans* E, *producat* F. *Dico* F, *esse quantitatem, siue denominatorem proportionis* A, *ad* C, *hoc est, si multiplicetur* F, *in* C, *produci* A. *Cum enim* D, *sit denominator proportionis* A, *ad* B, *si multiplicetur* D, *in* B, *producetur* A. *Eadem ratione, si* E, *multiplicetur in* C, *producetur* B; *producatur quoque* G, *ex multiplicatione* F, *in* C. *Ostendendum ergo est* G, *æqualem esse ipsi* A; *atq; adeo ex multiplicatione* F, *in* C, *produci* A. *Quoniam* F, & E, *multiplicantes* C, *produ-*



cunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, ut
18. septimi dictum est,) erit ut F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, mul-
17. septimi tiplicans E, & B, producit F, & A; erit ut E, ad B, ita F, ad A; & permutando ut E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B. Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea que F, quantitas erit proportionis A, ad C; quod est propositum.

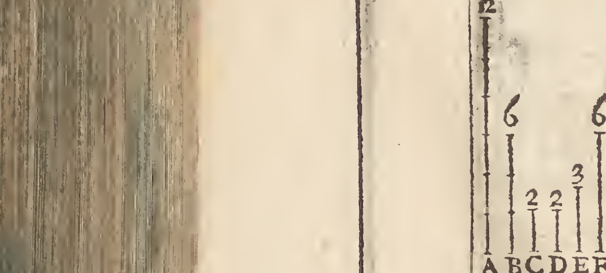
SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad vltimam componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad



quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, vt ostensum est: At uero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus, A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.

VITELLIO denique huiuscemodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; et B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem uidelicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur; æquale est ei, quod



ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) erit ut F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. quod est propositum. Hæc Vitellio. 19. septimi

IDEM *ostendetur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio.*

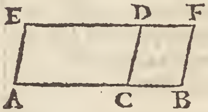
ITAQVE *cum proportio extremorum componatur ex proportionibus intermedijs, ceu demonstratum fuit; nihil aliud colligendum erit, quando proportio aliqua ex duabus proportionibus dicetur esse composita, quam eam proportionem eandem esse, quæ illa, quam habet prima aliqua quantitas ad tertiam, si modo tres quantitates ita coordinentur, ut proportio primæ ad secundam sit eadem, quæ altera componentium, & proportio secundæ ad tertiam eadem, qua reliqua componentium. Vt, quãdo dicitur proportio 16. ad 12. composita esse ex proportionibus 8. ad 3. & 2. ad 4. nihil aliud est intelligendum, quam si sumantur tres quilibet numeri 24. 9. 18. secundum proportionẽ 8. ad 3. & 2. ad 4. (est enim ut 8. ad 3. ita 24. ad 9. & ut 2. ad 4. ita 9. ad 18.) eam esse proportionem 16. ad 12. quam habent 24. ad 18. Vt manifestum erit propos. 23. huius lib.*

QVINQVE *autem prædictis definitionibus Euclidis addendam esse censemus sequentem sextam. quæ multum conducet, ut recte intelligantur 27, 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem est eiusmodi.*

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatũ, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere uero, quando occupat maiorem lineam, quã sit ea, secundum quam applicatur.

Sit data recta linea A B, supra quam constituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, sed desit C B; & ducta B F, parallela ipsi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrămum igitur A D, applicatum secundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita ut D B, appelletur defectus.



Rvrsvs sit data recta linea A C, supra quam constituatur parallelogrammum A B F E, quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipsi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum secundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, uocetur excessus.

Hic autem defectus D B, uel excessus, in rectangulis quidem esse potest uel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem, uel Rhombus, vel Rhomboides, ut perspicuum est.

1. ## THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.

Sint duo triangula A B C, D E F, quorum bases B C, E F, habentia eandem altitudinem. Item duo parallelogramma C G, E H, eiusdem altitudinis, quorum eadem bases B C, E F. Dico ita esse triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H, ut est basis B C, ad basin E F. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas G H, L N. (Nam ut in defin. 4. dictum

ctum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares a uerticibus ad bases demissæ æquales erunt) & ex B L, sumantur quotcunque rectæ B I, I K, K L ipsi B C, æquales; Item ex F N, abscindantur quotcunque rectæ F M, M N, æquales rectæ E F. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ A I, A K, A L, D M, D N. Erunt igitur triangula A B C, A I B, A K I, A L K, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula D E F, D F M, D M N. Quam multiplex est ergo recta C L, rectæ B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quam multiplex est recta E N, rectæ E F, tam quoque multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F; quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula A C L, D E N, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ C L, E N: Quoniam uero si basis C L, æqualis fuerit basi E N, necessario triangulum A C L, æquale est triangulo D E N; & si C L, maior fuerit quam E N, necessario A C L, maius est quam D E N; & si minor, minus; deficient propterea una C E, recta, & triangulum A C L, æquemultiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ ABC, ab EN, recta, & triangulo DEN, æque multiplicibus secundæ E F, & quartæ D E F; uel una æqualia erunt, uel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Quare quæ proportio est primæ B C, ad secundã EF, basis ad basin, ea est tertiæ ABC, ad quartã DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita triangulum ad triangulum. quod est propositum.

38. primi

38. primi

QVONIAM autem ut triangulum A B C, ad triangulum DEF, ita parallelogrammum C G, (quod duplũ est trianguli A B C, per 34. propositionem primi.) ad parallelogrammum E H (quod est duplũ trianguli DEF) perspicuũ est, ita quoq; esse parallelogrammum ad parallelogrammum,

6. defin. 5.

15. quinti.

11. quinti.

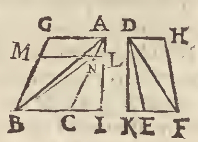
mum, ut est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo usi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi B G; nec nõ ex punctis M, N, parallelæ, ipsi F H. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut bases, eandem habent altitudinem, æqualesue.

SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammũ A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut basis B C, ad basin E F. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares A I, D K, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit A I, si fieri potest, maior, quã DK. Abscissa igitur I L, ipsi D K, æquali, ductaque L M, ipsi B C, parallela, quæ latus A C, secet in N, coniunctaq; recta B N; erit N B C, triãgulũ ad triangulum D E F, ut basis B C, ad basin E F; cum altitudines L I, D K, ponantur æquales. Sed fuit etiam A B C, ad D E F, ut B C, ad E F. Igitur triangula N B C, A B C, ad triangulum D E F, eandem habent proportionem; Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines A I, D K, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus, parallelogramma N M B C, A G B C, æqualia esse, si altitudines A I, D K, inæquales dicantur, & L I, D K, æquales.



1. sexti.

11. quinti

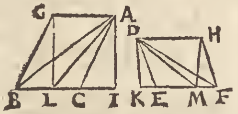
9 quinti.

ADDIT hoc in loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum,

rum æquales ſunt baſes, uel eadem, ita ſe habent inter ſe, ut altitudines.

S INT duo triangula A B C, D E F; & parallelogramma A G B C, D E F H, habentia baſes æquales B C, E F. Dico eſſe triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut altitudo A I, eſt ad altitudinem D K.



Si enim ſumantur rectæ I L, K M, baſibus B C, E F, æquales, ducanturque rectæ L A, M D; erit triangulum A L I, triangulo A B C, æquale, cum ſint ſuper baſes æquales L I, B C, & inter eaſdem parallelas A G, I B. 38.primi. *Eodem modo æquale erit triangulum D K M, triangulo D E F. Quare erit, ut A B C, ad D E F, ita A L I, ad D K M.* 7. quinti. *Eſt autē, ut A L I, ad D K M, ita A I, ad D K.* 1. ſexti. *(Nam ſi baſes ponantur A I, D K, erunt rectæ æquales L I, K M, altitudines.) Igitur & A B C, ad D E F, erit, ut A I, ad D K. Quod eſt propoſitum.*

QVONIAM uero eſt, ut A B C, ad D E F, ita parallelogrammum A G B C, trianguli A B C, duplum, ad parallelogrammum D E F H, trianguli D E F, duplum; 15.quinti. *Erit quoque A G B C, ad D E F H, ut A I, ad D K.* 11. quinti. *Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, ſi rectæ ducantur L G, M H. Idem ſequetur, ſi triangula, & parallelogramma eandem habuerint baſin.*

HOC uero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, ut altitudines, æquales habent baſes.

S IT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammũ A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut altitudo A I, ad altitudinem D K. Dico eorum baſes B C, E F, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit B C, ſi fieri po-

teſt

test, maior, quam E F. Abscissa igitur B L, ipsi E F, æquali, ducta, recta L A; erit, ut proxime demonstrauimus, A B L, ad DEF, ut A I, ad D K: Sed ut A I, ad D K, ita ponitur esse ABC, ad DEF.

11. quinti. *Igitur A B L, A B C, ad DEF, eandem habent proportionem; Ac proinde*

et 9. quinti. *tuinter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases B C, E F, sed æquales. Eademque est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta L M, ipsi G B, parallela ostendemus, parallelogramma M G B L, A G B C, æqualia esse, si bases BC, E F, dicantur inæquales.*

In omnibus autem his non uariabitur demonstratio, etiam si triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita ut altitudines sint ipsorum latera, uel unum fuerit rectangulum, alterum uero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget quandoque constructione.

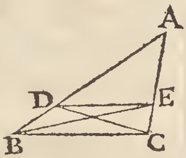
2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

In triangulo A B C, ducatur recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse ut A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E, erunt triangula D E B, DEC,

37. primi super eandem basin D E, & inter easdem parallelas D E, B C,

B C, constituta, inter se æqualia. Quare ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C; Atqui ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita basis A D, ad basin D B, (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, ut constat, si per E, agatur parallela recta ipsi A B;) & eadem ratione, ut triangulum A E D, ad triangulum DEC, ita basis AE, ad basin EC. Vt igitur A D, ad D B, ita A E, ad EC. (cum hæ duæ proportiones eædem sint propoitioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, uel trianguli A E D, ad triangulum D E C.) quod est propositum. *7. quinti.* *1. sexti.* *11. quinti.*



SECET iam recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam esse reliquo lateri B C. Ductis enim rursus rectis C D, B E, erit ut basis A D, ad basin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem ut A D, ad D B, ita A E, ad E C; igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E ad E C: Sed rursus ut basis A E, ad basin E C, ita triangulum A E D, ad triangulum D E C, cum sint altitudinis eiusdem. Igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C. Aequalia ergo sunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea cum eandem habeant basin D E, inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est D E ipsi B C; quod est propositum. Si itaq; ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum. *1. sexti.* *11. quinti* *1. sexti.* *11. quinti* *9. quinti.* *39. primi*

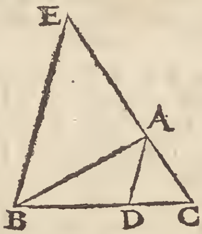
THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt

rationem

rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera; recta linea, quæ a uertice ad ſectioné producitur, ea biſariam ſecat trianguli ipſius angulum.

IN triangulo A B C, recta A D, ſecet angulum B A C, biſariam. Dico eſſe ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipſi A D, donec cum C A, producta conueniat in E;



29. primi — eritque angulus E B A, æqualis interno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter ſe æquales; Ideoque

6. primi. 7. quinti — rectæ B A, E A, inter ſe æquales. Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C; Atqui ut E A,

2. ſexti. — ad A C, ita B D, ad D C, cũ in triangulo B C E, recta A D,

11. quinti — ſit parallela lateri B E; Igitur ut B A, ad A C, ita B D, ad D C, quod eſt propoſitum.

SIT iam ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Dico rectã A D, biſariam ſecare angulum B A C. Agatur enim rurſus per B, recta B E, ipſi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur ut B A, ad A C, ita ponitur B D,

2. ſexti — ad D C; ut autem B D, ad D C, ita eſt E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta A D, ſit lateri B E, parallela) Erit

11. quinti — ut B A, ad A C, ita E A, ad eandem A C. Aequales igitur

9. quinti. — ſunt B A, & E A, inter ſe; ac propterea anguli A B E, &

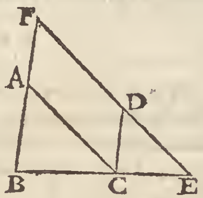
29. primi. — E, æquales erunt. Cum igitur angulus A B E, æqualis ſit alterno B A D; & angulus E, externo D A C; erunt & duo anguli B A D, D A C, inter ſe æquales, quod eſt propoſitum. Itaque ſi trianguli angulus biſariam ſectus ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SINT ęquiangula triangula A B C, D C E, sintq; æquales anguli A B C, D C E; & A C B, D E C; & B A C, C D E. Dico esse A B, ad B C, ut D C, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D; & A B, denique ad A C, ut D C, ad D E; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita ut angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; pariterque externus A C B, interno D E C. Et quia duo



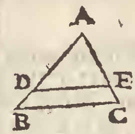
anguli A B C, A C B, minores sunt duobus rectis; est autē angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. Quare rectæ B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniā uero angulus externus D C E, æqualis est interno opposito A B C; parallelæ erunt C D, & B F. Eadem ratione, parallelæ erunt C A, & E F, quod angulus externus A C B, sit æqualis interno D E C. Parallelogrāmum est igitur A C D F; proptereaque recta A F, æqualis rectæ C D; & recta C A, rectæ D F. Quoniam igitur in triangulo B E F, recta A C, parallela est lateri E F; erit A B, ad A F, hoc est, ad D C, (quæ æqualis est ipsi A F,) ut B C, ad C E. permutando igitur erit A B, ad B C, ut D C, ad C E. Rursus quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela est lateri B F, erit B C, ad C E, ut F D, hoc est, ut C A, (quę æqua-

17. primi
11. pron.
28. primi
34. primi
2. sexti.
16. quinti
2. sexti.

16. quinti. æqualis est ipsi F D) ad E D. permutando igitur erit B C, ad C A, ut C E, ad E D. Cum igitur sit A B, ad BC, ut DC, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D: erit & ex æquali

22. quinti. A B, ad CA, ut D C, ad E D. quod est propositum. Æquiangulorũ ergo triangulorũ proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.



Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo A B C, lateri B C, parallela D E. Dico triangulum A D E, toti triangulo A B C, esse simile. Aequiangula namque sunt, cum anguli A D E,

29. primi A E D, æquales sint angulis A B C, A C B, externi internis; & angulus A, communis. Quare ut

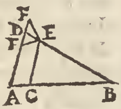
4. sexti. demonstratum est, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

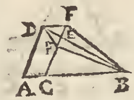
SCHOLION.

Non alienum a nostro instituto esse putaui, si hic demonstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs quæ uehuntur in aqua; Secundum uero in commentarijs in Apollonij Conic. Horum primum est.

Si ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum uero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta coniungens extremum unius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremum alterius lineæ.

Sit recta A B, *& ex punctis* A, *&* C, *educantur duæ parallelæ* A D, C E, *proportionem habentes, quam* A B, BC, *ita ut sit* A D, *ad* C E, *sicut* A B, *ad* B C; *uel* CE, *ad* A D, vt B C, ad A B. *Dico rectam, quæ coniungit extrema* B, & E, *transire per punctum* D. *Item rectam, quæ coniungit extrema* B, & D, *transire per punctum* E. *Si enim recta* B E, *nõ transit per* D, *coeat cum* A D, *in* F, *puncto, quod sit vel supra* D, *vel infra, ut in prima figura.*





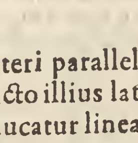
Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula B A F, B C E, *similia sunt; erit, ut* A B, *ad* A F, *ita* B C, *ad* C E; 4. sexti.
Et permutando, ut A B, *ad* B C, *ita* A F, *ad* C E: *Vt autem* 16. quinti.
A B, *ad* B C, *ita erat quoque* A D, *ad* C E; *Igitur erit, ut* A F, 11. quinti
ad C E, *ita* A D, *ad* C E: *Ac propterea æquales erunt rectæ* 9. quinti
A F, A D, *pars & totum: Quod est absurdum. Transit ergo recta* B E, *per punctum* D. *Quod est primum.*

RVRSVS *si recta* B D, *non transit per* E, *transeat per* F, *punctum, quod sit uel supra* E, *uel infra, ut in secunda figura. Quoniam ergo, per dictum coroll. triangula* B A D, B C E,
similia sunt; erit, ut A B, *ad* A D, *ita* B C, *ad* C F; *& per-* 4. sexti.
mutando, ut A B, *ad* B C, *ita* A D, *ad* C F: *Vt autem* A B, 16. quinti.
ad B C, *ita quoque erat* A D, *ad* C E; *Igitur erit, ut* A D, 11. quinti.
ad C F, *ita* A D, *ad* C E: *Ac proinde æquales erunt rectæ* 9. quinti.
C F, C E, *pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta* B D, *per* E. *Quod est secundum.*

Secundum uero est.

SI in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus dictum, in easdem rationes.

IN triangulo A B C, *ducta sit* D E, *lateri* B C, *parallela, & ex puncto* F, *quocunque ad angulum* A, *recta extendatur* F A, *secans* D E, *in* G. *Dico esse, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quoniam triangula* A F B, A G D, *ex coroll. huius propos. similia sunt; erit ut*

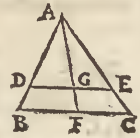


A F, *ad* B F, *ita* A G, *ad* D G; *& permu-* 4. sexti.

 tando,

16. quinti. *tando, ut* A F, *ad* A G, *ita* B F, *ad* D G. *Atque eodem argumento concludemus esse, ut* A F, *ad* A G,

11. quinti. *ita* F C, *ad* G E. *Igitur erit, ut* B F, *ad* D G, *ita* F C, *ad* G E; *& permutando, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quod est propositum.*



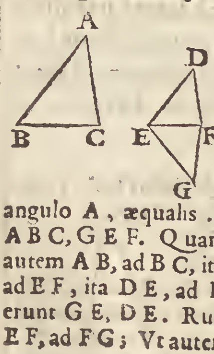
Aliter. Quoniã triangula A B F, A D G, *similia sunt, nec non triangula* A F C, A G E, *per*

4. sexti. *coroll. huius propos. erit, ut* B F, *ad* F A, *ita* D G, *ad* G A: *Item ut* F A, *ad* F C, *ita* G A, *ad* G E. *Ex æquo igitur, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quod erat demonstrandum.*

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula A B C, D E F, latera proportionalia, sitque A B, ad B C, ut D E, ad E F; & B C, ad C A, ut E F, ad F D; & A B, denique ad A C, ut D E, ad D F. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F; sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C, conueniantque rectæ E G, F G, in G;



32. primi eritq; reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula

4. sexti. A B C, G E F. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; Vt

11. quinti. autem A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. Igitur ut G E,

9 quinti. ad E F, ita D E, ad E F, eandem: proptereaque æquales

4. sexti. erunt G E, D E. Rursus, quoniam ut B C, ad C A, ita E F, ad F G; Vt autem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad

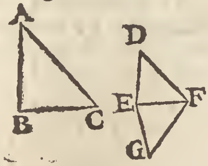
F D;

F D; erit ut E F, ad F G, ita eadẽ E F, ad F D; ideoque æquales erunt F G, F D. Itaque cum latera E G, F G, æqualia sint lateribus D E, D F, utrumque utrique; & basis communis E F, erunt anguli G, & D, æquales; ac propterea reliqui anguli G E F, reliquis angulis D E F, D F E, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A, erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque modo angulus D E F, angulo B, & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat. *9. quinti.* *8. primi* *4. primi*

THEOR. 6. PROPOS. 6. *6.*

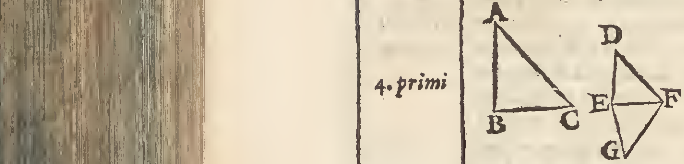
SI duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli D E F, sintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, E F, hoc est, sit A B, ad B C, ut D E, ad E F. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulũ scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim equales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus F E G; & angulo C, angulus E F G; eritque, ut in præcedenti propos. dictum est, triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; sed ut A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F; igitur ut D E, ad E F, ita G E, ad eandem E F; ac idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E, *4. sexti.* *11. quinti.* *9. quinti.*



E F, æqualia ſint lateribus G E, E F, & anguli ipſis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus eſt, æqualis angulus F E G, æqualis eſt poſitus angulus D E F, proptereaq; æquales ad inuicem erunt anguli D E F, G E F,) erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, ſit æqualis angulo A, & angulus

4. primi



E F G, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, E F D; & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F. quod eſt propoſitum. Si igitur duo triangula unũ angulum uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonſtrandum.

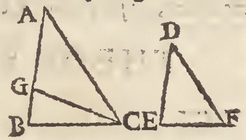
7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum uero ſimul utrunque aut minorem, aut nõ minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

Sit angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F; & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc eſt, ſit ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B, & E, ſit uel minor recto, uel non minor. Dico æquiangula eſſe triangula, angulos ſcilicet A C B, & F, circa quos ſunt latera proportionalia, nec non & angulos B, & E, æquales eſſe. Sit enim primo tam B, quam E, recto minor: Quo poſito, ſi anguli A C B, & F, non ſunt æquales, ſit A C B, maior, quam F; fiatque ipſi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo D,

ponatur

ponatur æqualis, erit & reliquus A G C reliquo E, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. 32. primi
Quare ut A C, ad C G, ita DF, ad F E; sed ut D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B: Vt igitur A C, ad C G, ita eadem A C, ad C B; ac propterea æquales erunt C G, C B, & anguli CBG, C G B, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoque ei deinceps A G C, recto maior; cum A G C, C G B, sint duobus rectis æquales; Est autem ostensus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est angulus E; Sed positus est etiam recto minor. quod est absurdum. 4. sexti. 11. quinti. 9. quinti. 5. primi 13. primi



SIT secundo tam B, angulus, quam E, recto non minor, eritque ut prius angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & C G B, recto non minor erit, ac propterea anguli C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, sed uel maiores, uel æquales duobus rectis, quod est absurdū. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, ac idcirco reliqui etiā anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat. 17. primi 32. primi

SCHOLION.

ADDIDIT Euclides, utrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse uel minorem recto, uel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, habebunt duo triangula A B C, AGC, *unum angulū uni angulo æqualē, immo angulum A, cōmunem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, ut A C, ad C B, ita eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non sunt ullo modo æquiangula triangula A B C, A G C, ut constat. Quod ideo euenit, quia non uterque angulorum* A B C, A G C, *minor est recto, uel non minor. Immo* A B C, *est quidem recto minor; A G C,* 7. quinti.

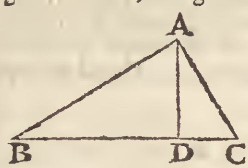
uero recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia sint,
5. primi — *& ideo anguli C B G, C G B, æquales; erit uterque eorum re-*
17. uel 32. primi. — *cto minor, ac propterea A G C, recto maior.*

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, a quo ad basin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, similia esse & toti triangulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, sint recti, & angulus B, communis, erunt & reliqui anguli
32. primi — A C B, & D A B, æquales. Aequiangulum est igitur triangulum D B A, triangulo A B C, ac propterea habebunt latera circa equales angulos pro-



4. sexti. — portionalia, hoc est, erit ut C B, ad B A, ita B A, ad BD: & ut B A, ad A C, ita B D, ad D A; & ut B C, ad C A, ita B A, ad A D. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo ostendetur triangulum A D C, simile eidem triangulo A B C; Nam anguli BAC, & A D C, sunt recti, & angulus C, communis; ac propte-
32. primi — rea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare ut
4. sexti. — B C, ad CA, ita C A, ad C D; & ut C A, ad AB, ita CD, ad D A; & ut C B, ad B A, ita C A, ad A D. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B, & A D C, cũ anguli A D B, A D C, sint recti, & anguli ABD, CAD, ostensi æquales, nec non anguli BA D, A C D; Atque idcirco sit ut B D, ad D A, ita D A, ad D C, &c. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

CORROL-

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, perpendicularē quæ in rectangulo triā gulo ab angulo recto in baſin demittitur, eſſe mediam proportionalem inter duo baſis ſegmenta: Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale inter totam baſin, & illud ſegmentum baſis, quod dicto lateri adiacet.

Ostensvm eſt enim, eſſe ut B D, ad D A, ita D A, ad DC; ac propterea D A, eſſe mediam proportionalem inter B D, & D C: Item eſſe ut C B, ad B A, ita B A, ad B D; & idcirco B A, mediam eſſe proportionalem inter C B, & B D: Denique eſſe ut B C, ad C A, ita C A, ad C D; ideoque C A, eſſe proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. 11.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.

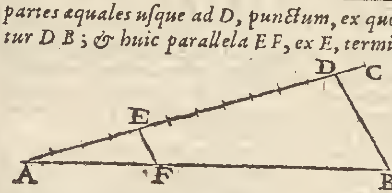
Imperetvr, ut ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, utcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abſcindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda eſt ex A B, ut in propoſito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, eſſe partem tertiam imperatam.

Nam cum in triangulo A B F, lateri F B, parallela ſit recta D G; erit ut F D, ad D A, ita B G, ad G A; componendo *2. ſexti.*
igitur, ut F A, ad D A, ita B A, ad G A: ſed F A, ipſius *18. quinti.*
A D, eſt tripla ex conſtructione; Igitur & B A ipſius A G, erit tripla, ideoque A G, erit tertia pars ipſius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abſtulimus. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Qvod ſi ex A B; auferenda ſit pars, quæ contineat quatuor undecimas ipſius A B, ſumendæ erunt ex A C, undecim partes.

partes æquales usque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partiũ.



Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rursus ut D A, ad A E, ita B A, ad A F: Quare, & conuertendo ut A E, ad A D, ita A F, ad A B: Est autem A E, pars continens quatuor undecimas ipsius A D, ex constructione; Igitur & A F, eadẽ pars erit rectæ A B. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas.

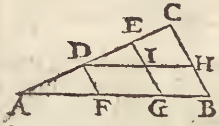
4. *quinti.*

12.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

SIT recta A B, secanda similiter, ut secta est recta A C, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus A D, D E, E C, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, parallelæ ipsi B C. Dico rectam A B, similiter esse sectam in F, & G, ut est secta A C, in D, & E. Nam ut A D, ad D E, ita A F, ad F G; Proportionales ergo sunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quod si ducatur D H, ipsi F B, parallela, secans E G, in I, erit rursus ut D E, ad E C, ita D I, ad I H, hoc est, ita F G, ad G B; quod F G, ipsi D I, & G B, ipsi I H, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes F G, G B, partibus D E, E C. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.



2. *sexti.*

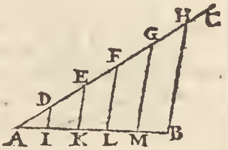
2. *sexti.*

34. *primi*

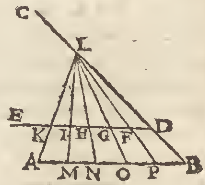
SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc problemate colligi poteſt facilis admodum uia, ac ratio diuidendi lineam rectā datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus. Sit enim data recta A B, diuidenda in quinque partes æquales. Ducta recta A C, faciente cum A B, quemcunque angulū C A B, ſumantur ex ea quinque partes æquales A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H, utcunque eſt diuiſa, ſi ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur D I, E K, F L, G M; erit A B, ſimiliter diuiſa, ut A H, ceu conſtat ex demonſtratione huius problematis. Cum igitur A H, ſit diuiſa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes diuiſa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta A B.

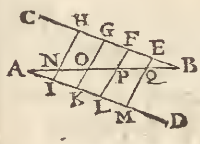


Hvic rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi poſſunt aliæ non iniucundæ, ceu propos. 10. lib. 1. ſumus polliciti. Sit enim rurſus data linea recta A B, diuidenda in quinque partes æquales. Ducatur ex B, recta B C, utcunque faciens angulum cum A B; Deinde ex aſſumpto puncto D, agatur D E, parallela ipſi A B, ex qua abſcindantur quinque æquales partes D F, F G, G H, H I, I K, ea lege tamen, ut D K, minor ſit quam A B. Poſtremo ex A, per K, recta ducatur A L, occurrens ipſi B C, in L, puncto, a quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur L P, L O, L N, L M, quas dico diuidere rectā A B, in quinque partes æquales. Cum enim D E, ſit parallela ipſi A B, erit angulus L I K, angulo L M A, 29. primi *& angulus L K I, angulo L A M, æqualis: eſt autem angulus A L M, communis; Aequiangula igitur ſunt triangula L K I, L A M, ac propterea ut L I, ad I K, ita L M, ad M A; Item* 4. ſexti. *eadem ratione, ut L I, ad I H, ita L M, ad M N: ſed ut L I, ad*



7. quinti. *ad I K, ita L I, ad I H, quod æquales sumptæ sint I K, I H; igi-*
11. quinti. *tur ut L M, ad M A, ita eadem L M, ad M N; ideoque æqua-*
9. quinti. *les erunt A M, M N. Non aliter ostendes M N, æqualē esse ipsi N O; & N O, ipsi O P, & O P, ipsi P B. Diuisa est ergo A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.*

ALITER. *Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ B C, A D, inter se parallelæ; Et ex B C, abscindantur quatuor partes æquales B E, E F, F G, G H, ut sint tot partes una minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex A D, totidem æquales resecentur A I, I K, K L, L M. Ductis igitur rectis E M, F L, G K, H I, secantibus rectam A B, in N, O, P, Q; dico ipsam A B, sectam esse in quinque partes æquales.*

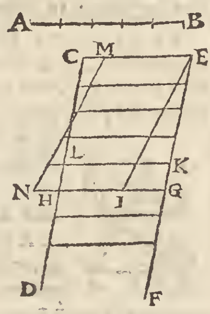


Cum
33. primi *enim æquales sint, & parallelæ G H, I K, erunt & H I, G K, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt G K, F L, E M. Quare cum A M, secta sit in quatuor æquales partes, erit & A Q, similiter in quatuor partes æquales diuisa, ut constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa erit & B N, in quatuor partes æquales, eo quod B H, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cum tam A N, quam B Q, æqualis sit singulis partibus N O, O P, P Q; erũt omnes quinque partes A N, N O, O P, P Q, Q B, inter se æquales. Quod est propositum.*

ALITER. *Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum. Ductis duabus rectis inter se parallelis utcunque C D, E F; ex utraque abscindantur partes inter se æquales quotcunque, saltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde officio circini capiatur longitudo rectæ A B, diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ C E, ut ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I, illius lineæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo est recta G H; ea enim includit quinque spatia. Postremo ex E, ad I, recta ducatur E I, quã dico diuisam esse in quinque æquales partes. Cum enim G K,*
33. primi *H I, æquales sint, & parallelæ, erunt quoque G H, K I, parallelæ; Eodemque modo omnes lineæ inter rectas C D, E F,*

inter

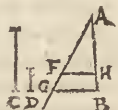
inter se parallelæ ostendentur. Quare, ut ex demonstratione huius 10. propos. liquet, quèmadmodum E G, diuisa est in quinque partes æquales, ita similiter in totidem diuisa erit E I. Si igitur officio circini singulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propositam A B, ipsi E I, æqualem, diuisa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.



ALIQVANDO *autem necesse est lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadē linea transferatur ab M, usque ad N, punctum lineæ G H, protractæ, erit quoque M N, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi E G, parallela, usque ad rectam G H. Quod si linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendæ erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c.*

EODEM *modo, ad similitudinem huis propositionis, licebit nobis facili negotio datam lineam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam. Id enim non raro a Geometris exigitur.*

SIT *secanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam rectæ C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta A F, ipsi C, & F G, ipsi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, cum sit, ut A F, ad F G, atque adeo, ut C, ad D, ita A H, ad H B.* *2. sexti.*



POSTREMO *inseremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ uehuntur in aqua. Nimirum.*

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ se

ctiones

ctiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.

SECENTVR *rectæ* A B, C D, *proportionaliter in binis punctis* E, F, *&* G, H, *ita ut sit* A E, *ad* E B, *sicut* C G, *ad* G D; *Item* A F, *ad* F B, *ut* C H, *ad* H D. *Dico sectiones intermedias* E F, G H, *proportionales quoque esse cum duobus segmentis* A E, C G; *uel cum duobus* F B, H D; *hoc est, esse* A E, *ad* E F, *ut* C G, *ad* G H. *Item* F B, *ad* E F, *ut* H D, *ad* G H. *Cum enim sit, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Erit componendo, ut* A B, *ad* E B, *ita* C D, *ad* G D. *Item cum sit, ut* A F, *ad* F B, *ita* C H, *ad* H D; *Erit componendo, ut* A B, *ad* F B, *ita* C D, *ad* H D; *&*

conuertendo, ut F B, *ad* A B, *ita* H D, *ad* C D. *Itaque cum sit, ut* F B, *ad* A B, *ita* H D, *ad* C D; *Et ut* A B, *ad* E B, *ita* C D,
22. quinti. *ad* G D; *Erit ex æquo, ut* F B, *ad* E B, *ita* H D, *ad* G D; *Et conuertendo, ut* E B, *ad* F B, *ita* G D, *ad* H D; *Et per conuersionem rationis, ut* E B, *ad* E F, *ita* G D, *ad* G H; *Et diuidendo, ut* F B, *ad* E F, *ita* H D, *ad* G H. *Quod est secundum.*

RVRSVS, *quia est, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Et ut* E B, *ad* E F, *ita* G D, *ad* G H; *Erit ex æquo, ut* A E, *ad* E F, *ita* C G, *ad* G H. *Quod est primum.*

BREVIVS *tota propositio demonstrabitur hoc modo. Cõueniant duo puncta* A, *&* C, *in unum, ut fiat angulus* B C D, *uel* B A D; *iunganturque rectæ* D B, H F, G E. *Quia igitur est,*
2. sexti. *ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Parallela erit* G E, *ipsi* D B. *Rursus, cum sit, ut* A F, *ad* F B, *ita* C H, *ad* H D; *Pa-*
30. primi *rallela erit eadem ratione* H F, *ipsi* D B. *Quare &* G E, H F,
2. sexti. *inter se parallelæ sunt: Ac propterea erit, ut* A E, *ad* E F, *ita* C G, *ad* G H. *Quod est propositum.*

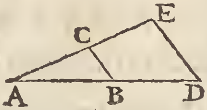
10.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ A B, A C, ita dispositæ, ut efficiant angulum

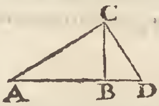
angulum A, quemcumque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem A B, ad A C, ita A C, ad tertiam. Producatur A B, quam uolumus esse antecedentem, & capiatur B D, æqualis ipsi A C. Deinde ducta recta B C, agatur illi ex D, parallela D E, occurrens ipsi A C, productæ in E. Dico C E, esse tertiam proportionalẽ, hoc est, esse ut A B, ad A C, ita A C, ad C E. Cum enim in triãgulo A D E, lateri D E, parallela sit recta B C; erit ut A B, ad B D, ita A C, ad C E; Sed ut A B, ad B D, ita eadem A B, ad A C, æqualem ipsi B D: Vt igitur A B, ad A C, ita A C, ad C E. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



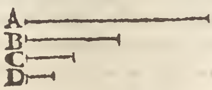
2. sexti.
7. quinti.

SCHOLION.

ALITER *idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ* A B, B C, *constituantur ad angulum rectum* A B C; *& coniungatur recta* A C. *Producta autem* A B, *antecedente, ducatur ex C, ad* A C, *perpendicularis C D, occurrens ipsi* A B, *productæ in* D. *Dico B* D, *esse tertiam proportionalem. Cum enim in triãgulo* ACD, *angulus* A C D, *sit rectus, & ab eo ad basin* AD, *deducta perpendicularis C B; erit per coroll. 8. propos. huius lib. B C, media proportionalis inter* A B, *&* B D, *hoc est, ut* A B, *ad* B C, *ita erit* B C, *ad* B D. *Quod est propositum.*



INVENTA *autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & aliis duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis* A, *&* B, *adinueniatur tertia proportionalis C; & duabus* B, *&* C, *tertia proportionalis* D, *erunt quatuor lineæ* A, B, C, D, *continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis,*

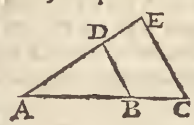


tionalis, sexta, septima, octaua, &c.

10. PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem A B, ad B C, ita A D, ad quartam. Disponantur primæ duæ A B, B C, secundum lineam rectã, quæ sit A C: Tertia uero A D, cum prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo A C E, lateri C E, acta sit perpendicularis B D, erit ut



2. *sexti.* A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

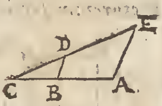
HINC *facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ* A, B, *in quacunque proportione, si tertia quelibet accipiatur* C, *& ei quarta proportionalis inueniatur* D, *ut sit quemadmodum* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D; *factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.*

OSTENDEMVS *etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.*

TRIBVS datis rectis lineis, quartã inuenire, quæ sit ad tertiam, ut prima ad secundam.

SINT

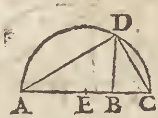
Sint tres rectæ A B, B C, C D; oporteatque inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam sit, ut A B, prima ad B C, secundam. Disponantur primæ duæ A B, B C, in directum, ut faciant rectam A C: Tertia uero C D, cum secunda B C, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A, parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ, in E. Dico E D, esse quartam, hoc est, esse E D, ad D C, tertiam, ut est A B, prima ad B C, secundam. Hoc autem manifestum est, cum A C, E C, proportionaliter secentur in B, & D. 2. sexti.



PROBL. 5. PROPOS. 13. 9.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

Sint duæ rectæ A B; B C, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam A C. Diuisa A C, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo E A, uel E C, semicirculus describatur A D C; Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circumferentiam usque. Dico B D, esse mediam proportionalẽ. Ductis enim rectis A D, C D, erit angulus A D C, rectus in semicirculo existens. 31. tertij. Cum igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta sit ad basin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium 8. propos. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & B C. Duabus ergo datis rectis lineis, mediã proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



SCHOLION.

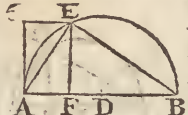
Perspicuum hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo a quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, mediam esse proportionalem, *inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipsi A C. Dico DB, esse proportionalem mediam inter A D, & D C, id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ A B, C B, fiet angulus*

31. tertij. *A B C, rectus; Quare per coroll. propos. 8. constat propositũ. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, &c.*

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.

SIT data recta A C, & diuidenda proponatur recta A B, (quæ minor non sit quam dupla ipsius A C, sed uel dupla, uel maior) ita ut inter huius segmenta, media proportionalis sit A C. Disponantur rectæ AB, A C, ad angulum rectum B A C, & diuisa A B, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem D A, uel D B, semicirculus describatur A E B. Deinde per C, ducatur ipsi A B, parallela C E, secans circumferentiam in E, puncto, a quo demittatur ad A B, perpendicularis E F. Dico A C, esse mediam proportionalem inter segmenta A F. F B. Ductis enim rectis A E, B E, erit ut iam est demonstratum, ex coroll. 8. propos. huius lib. E F,



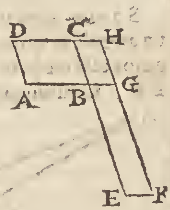
34. primi media proportionalis inter A F, & F B. Cum igitur E F, æqualis sit ipsi A C, eo quod parallelogrammum sit A C E F; (Est enim
28. primi C E, ipsi A F, parallela per constructionem, & A C, ipsi E F, propter angulos rectos C A F, & E F A;) erit & A C, media proportionalis inter A F, & F B. Quod est propositum.

13. THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & unum uni æqualem

lem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos A B C, E B G, æquales. Dico latera circum hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe ut A B, ad B G, ita E B, ad B C. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut A B, & B G, unam efficiant lineã rectam. Quo facto, cum anguli ABC, E B G, ſint æquales, erunt & E B, BC, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur iam D C, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia ſunt parallelogramma D B, B F, erit ut D B, ad BH, ita B F, ad idem B H. Sed ut D B, ad B H, ita eſt A B, baſis ad baſin B H, quod parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; & ſimiliter ut B F, ad B H, ita eſt baſis E B, ad baſin B C: Igitur ut A B, ad B G, ita eſt E B, ad B C, quod eſt propoſitum.



7. quinti.
1. ſexti.

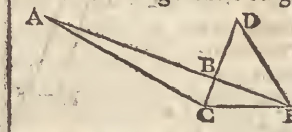
E CONTRARIO, ſint iam latera circa æquales angulos A B C, E B G, reciproca, hoc eſt, ut A B, ad B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione, cum ſit, ut A B, ad B G, ita E B, ad B C; Vt autem A B, ad B G, ita D B, ad B H; & ut E B, ad B C, ita B F, ad idem B H: erit quoque ut D B, ad B H, ita B F, ad idem B H; Ac idcirco æqualia erunt parallelogramma D B, B F. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

1. ſexti.
9. quinti.

14. THEOR. 10. PROPOS. 15.

AEQVALIVM, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

SINT duo triangula æqualia A B C, D B E, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur triangula ad angulos æquales, ita ut



A B, B E, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli A B C, D B E, ſint æquales; erit & D B, B C, una recta linea, ceu demonſtratum eſt, ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E; quoniam æqualia ſunt triangula A B C, D B E, erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, ad idē B C E; ſed ut triangulum A B C, ad triangulum B C E, ita eſt baſis A B, ad baſin B E, quod hæc triangula eiuſdem ſint altitudinis; & ſimiliter ut D B E, ad B C E, ita baſis D B, ad B C; Quare ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Quod eſt propoſitum.

7. quinti.

1. ſexti.

IAM uero contra, ſint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc eſt, ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, eſſe æqualia. Facta enim conſtructione eadem, cum ſit ut A B, ad B E, ita D B, ad B C; ut autem A B, ad B E, ita triangulum A B C, ad triangula B C E; & ut D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E: Erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E; proptereaq; æqualia erunt triangula A B C, D B E.

1. ſexti

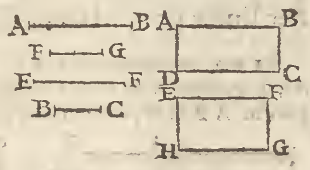
9. quinti.

D B E. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 11. PROPOS. 16. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C, ut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum A B C D, comprehenſum ſub extremis A B, B C; rectangulum uero E F G H, comprehenſum ſub medijs E F, F G. Dico rectangula A C, E G, eſſe æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit ut A B, ad F G, ita E F, ad B C; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelogrāma A C, E G, æqualia erunt. Quod eſt propoſitum. 14. ſexti.



CONTRA uero, ſint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B C, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe ut A B, ad F G, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia ſint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & C; erunt latera circa hoſce angulos reciproca, ſicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales 14. ſexti.

fuerint,

fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Idem uerum est, etiam si parallelogramma A C, F G, non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales. Veluti manifestum est in hoc figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.

16. ## THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT tres lineæ rectæ A B, E F, & B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C, sitque rectangulum A B C D, contentum sub extremis A B, B C; & sit quadratum mediæ E F, sit E F G H. Dico æqualia esse rectangulum A C, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis sit ipsi E F, erunt quatuor lineæ A B, E F, F G, B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita F G, ad B C; eritque quadratum E G, comprehensum sub medijs E F, F G, propter æqualitatem rectarũ E F, F G; Quare rectangulum A C, comprehensum sub

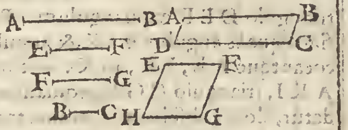
extre-

extremis A B, B C, æquale est quadrato E G, hoc est, rectangulo sub medijs E F, E G, comprehenso: Quod est propositum. 16. sexti.

SED sint iam æqualia rectangulum A C, & quadratũ E G. Dico esse ut A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia sint rectangula A C, & E G, erit ut A B, ad E F, ita F G, ad B C. Vt autem F G, ad B C, ita est E F, ipsi F G, æqualis, ad eandem B C. Quare ut A B, ad E F, ita est E F, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum. 16. sexti. 7. quinti.

SCHOLION.

EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut E G, sit Rhombus, & A C, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, ut figura indicat.



COROLLARIVM.

Ex posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalẽ inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, ostensum fuit, esse ut A B, ad E F, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & B C.

PROBL. 6. PROPOS. 18. 19.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describere.

SIT data recta A B, super quam describendum sit re-

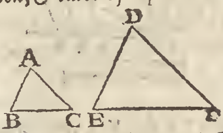
ctilineum rectilineo C D E F G, simile similiterq; positum, Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coeantque rectæ A I, B I; in puncto I; eritque reliquo angulo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis, totumque trian-
32. primi gulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rursus angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus B I H; conueniantque B H, I H, in puncto H; eritque eadem ratione triangulū B H I, triangulo D E F, æquiangulum.

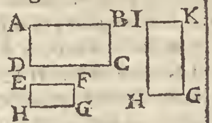
Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K; coeantque A K, I K, in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G E, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus I A B, constitutus sit æqualis angulo F C D; & angulus I A K, angulo F C G; erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis; Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut constat ex constructione. Quare æquiangulum erit rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G. Quoniam uero ita est A B, ad B I, ut C D, ad D F; & ita B I, ad B H,
4. sexti.
22. sexti. ut D F, ad D E; erit ex æquo ita A B, ad B H, ut C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, proportionalia sunt. Sunt autem & latera circa equales an-
4. sexti. gulos H, & E, proportionalia, ob triangula æquiangula
4. sexti. B H I, D E F. Rursus ita est H I, ad I B, ut E F, ad F D; & ita I B, ad I A, ut F D, ad F C; & ita I A, ad I K, ut F C,
22. sexti. ad F G; Quare ex æquo erit ita H I, ad I K, ut E F, ad F G; & ideo latera quoque circa angulos H I K, E F G, proportionalia, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo

ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsimus; Quod faciendum erat.

SCHOLION.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & reliqui æquales semper ordine sese consequuntur, nec non, & latera proportionalia. Vt triangula A B C, DEF, non solum erunt similia, sed etiã super rectas B C, E F, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit A B, ad B C, ut D E, ad E F, &c. At super rectas B C, D E, non dicentur similiter esse descripta, cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula A C, E G, similia, dicentur similiter esse descripta sup rectas D C, H G, quoniam ut A D, ad D C, ita est E H, ad H G, &c. At verò rectangula A C, I G, non dicentur similiter descripta super rectas D C, H G, quamuis sint similia, ut manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas D C, I H, uel super rectas A D, H G.





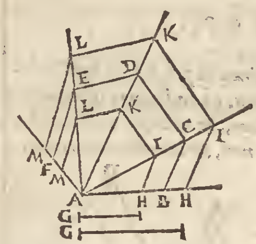
Omnes autem figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, ut patet in rectilineis A B H I K, C D E F G, super lineas A B, & C D, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter.

FORTASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo A B C D E F, super datam rectam G, describendum simile rectilineum, similiterque positum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ A C, A D, A E, quantumlibet. Deinde ex A B, abscindatur A H, æqualis datæ rectæ G, uel certe ex ipsa A B, ulterius producta, si uidelicet G, fuerit maior, quam A B. Post hæc per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per

I, recta

I, recta I K, lateri C D, parallela, & sic deinceps; donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis A B, A F; factumq; erit, quod proponitur. Cũ enim angulus A, sit communis; & angulis A B C, A F E, æquales sint anguli A H I, A M L;

29. primi



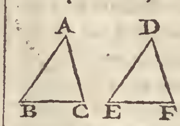
Nec non & angulis A C B, A C D, æquales sint anguli A I H, A I K, hoc est, toti angulo B C D, æqualis sit angulus H I K; Eodemque modo anguli C D E, D E F, æquales sint anguli I K L, K L M: Aequiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, ut A B, ad

4. sexti. *B C, ita A H, ad H I. Rursus, ut B C, ad C A, ita H I, ad I A; Et ut C A, ad C D, ita I A, ad I K: Ac proinde, ex æquo, ut B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, & similiter posita.*

17. ## THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SINT triangula similia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico triangula inter se rationem habere duplicatã eius, quam habent latera homologa B C, & E F. Sint enim primum latera B C, E F, æqualia; eruntque propterea triangula



26. primi inter se æqualia, habebuntque proportionem æqualitatis, quemadmodũ & latera homologa; Atqui proportio equalitatis

litatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, ut constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam.) Igitur triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet latus B C, ad E F. Quod est propositum.

SIT secundo B C, latus latere E F, maius; & ex BC, abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturq; recta A G. Quia igitur est ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando ut A B, ad DE, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad EF, ita est per constructionem E F, ad B G: Vt ergo A B, ad D E, ita erit E F, ad B G. Quare cum triangula A B G, D E F, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, ipsa inter se æqualia erunt; & propterea ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G; Vt autem triangulum A B C, ad triangulum A B G, eiusdem altitudinis, ita est basis B C, ad basin B G. Igitur ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est B C, ad B G. Atqui cum tres lineæ B C, E F, B G, sint proportionales, erit proportio primæ B C, ad tertiam B G, duplicata proportionis B C, primæ ad E F, secundam. Quare & triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam proportionis B C, ad E F. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

11. sexti.

11. quinti.

15. sexti.

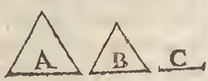
7. quinti.

1. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

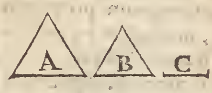
SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterque descripta.



DICO,

Dico, ut eſt recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita eſſe triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, eſt, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B: Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

19. ſexti.



EODEM modo oſtendes, ita eſſe triangulum ſupra ſecundam ad triangulum ſupra tertiã ſimile ſimiliterq; deſcriptu, ut eſt prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & ſuper B, ſecundam, & A, tertiam conſtituantur triangula ſimilia ſimiliterque poſita B, & A. Dico, ut eſt recta C, ad rectã A, ita eſſe triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata eſt proportionis C, ad B, hoc eſt, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, ſunt latera homologa; Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

18.

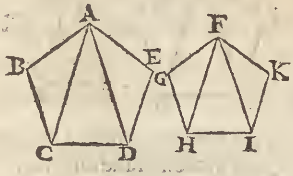
THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

SINT polygona ſimilia A B C D E, F G H I K, habentia angulos æquales B A E, G F K; Item angulos B, G, & ſic deinceps. habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem A B, ad B C, ita F G, ad GH; & ut B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primo, hæc polygona diuidi in triangula ſimilia, quæ ſint numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſint A C, A D, F H, F I; diuiſaque erunt polygona in triangula numero æqualia, cũ propter ſimilitudinem habeant angulos numero æquales. Quoniam uero angulus B, æqualis eſt angulo G, ex hypotheſi, & circa ipſos latera proportionalia; æquiangula erunt

triangula

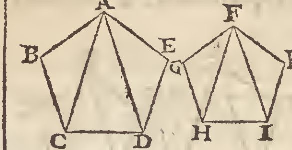
triangula A B C, F GH, habentia angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G; ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt. Eadem ratione erunt similia triangula A E D, F K I. Deinde quia est ut A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob similitudinem triangulorum A B C, F G H; ut autem C B, ad C D, ita est, ex hypotesi, H G, ad H I, ob similitudinem polygonorum; Ex æquo erit ut A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur angulo G H I; est autem & ablatus A C B, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. Quare triangula A C D, F H I, æquiangula erunt, ideoque similia. *6. sexti.* *4. sexti.* *22. quinti.* *6. sexti.*



Dico præterea triangula hæc esse homologa totis polygonis. Quoniam similia sunt triangula A B C, F G H, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H: Atque eodem argumento proportio triãgulorum A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum A D E, ad triangulum F I K, ut A C D, ad F H I. Atque ita proportionalia sunt triangula unius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula unius sint antecedentia, & triangula altetius consequentia proportionum. Vt autem unum antecedens ad unum consequens, ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homoga erunt totis polygonis. *19. sexti.* *12. quinti.*

Dico postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim sit ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K; Triãgulum

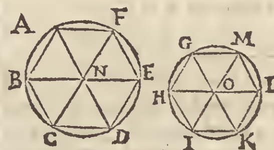
19. quinti. gulum uero A B C, ad triangulum F G H, habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa A B, F G: habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorũdem laterum homologorum A B, FG.



Itaq; similia polygona in similia triangula diuidũtur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

QVOD si polygona similia, fuerint æquilatera, & æquiangula, diuidentur quoque in similia triangula, & numero æqualia, ductis e centris circulorum ipsa circunscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula A B C D E F, GHI K L M, quæ circunscribantur a circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducatur N A, N B, &c. Dico *triangula N C D, O I K, similis esse. Quoniam anguli C N D, I O K, æquales sunt; (quod æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam utrunque spacium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & quantitate æquales, subtensos nimirum a basibus æqualibus, contentosque lateribus æqualibus.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum utrobique sit proportio æqualitatis;*



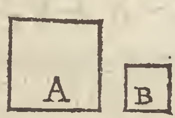
6. sexti. *Similia erunt triangula N C D, O I K. Eademque est ratio de cæteris. At uero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negocio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, ut patet, habebunt utique eandem cum ipsis proportionem.*

15. quinti *PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theore-*

theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

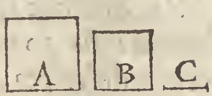
SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, ut constat ex 1. defin. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut hic apparet. 1. 2. 4.



SIT iam quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, ut dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in exemplo adducto superius apparet.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum.



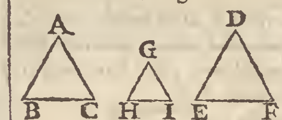
HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate: Ut perspicuum est in hac figura apposita.

THEOR.

20. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

Sint rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales sint angulis rectilinei G H I; Item eadem de causa anguli rectilinei D E F, æquales angulis eiusdem rectilinei G H I; erunt per communem sententiam, anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cum ob eandem similitudinem latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea uidelicet, quæ circum æquales sunt angulos; Item eandem ob causam, latera rectilinei D E F, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei G H I; erunt quoque latera rectilinei A B C, lateribus rectilinei D E F, proportionalia, ea



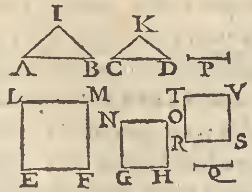
11. quinti nimirum, quæ angulos ambiunt æquales; Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea A B C, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

21. THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales,

nales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Constituanturque super A B, C D, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta A B I, C D K; Item super E F, G H, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, E F M L, G H O N. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia proportionalis Q, eritque ex æquo, ut A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita est rectilineum A B I, ad



rectilineum C D K, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. uel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, ut E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. Igitur ut A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod est propositum.

11. *sexti.*

22. *quinti.*

11. *quinti.*

E CONVERSO, sint iam dicta rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D, E F, G H, esse quoque proportionales, ut quidem A B ad C D, ita E F, ad G H. Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, super quam describatur rectilineum R S V T, simile rectilineo E M, & ob id rectilineo G O, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, ut iam est ostensum, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt autem A B I, ad C D K, ita quoque ponitur E M, ad G O: Igitur erit ut E M, ad R V, ita E M, ad G O; Ac idcirco æqualia erunt R V, G O. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus, super rectas R S, G H, æquales. Quare erit ut E F, ad R S, ita E F, ad G H. Ponitur autem E F, ad R S, ut A B, ad C D. Igitur erit ut A B, ad C D, ita E F, quoque ad G H. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

12. *sexti.*

21. *sexti.*

11. *quinti.*

9. *quinti.*

7. *quinti.*

11. *quinti.*

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt G O, R V, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt G H, R S; sit G H, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut G H, ad H O, ita R S, ad S V; Ponatur autem G H, maior quam
14. quinti. R S; erit quoque H O, maior quam S V; & propterea rectilineum G O, maius rectilineo R V, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ G H, R S. quod est propositum.

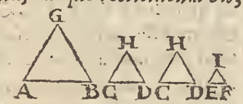
ALITER. Sint duo rectilinea A B C, D E F, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ A B, D E, esse æqualia. Si enim non credatur æqualia, sit A B, maius, quam D E; inueniaturque rectis A B, D E, tertia proportionalis G.

Quoniam ergo est, ut A B, ad D E, ita D E, ad G; Est autem A B, maior, quam D E: Erit quoque D E, maior, quam G; ac propterea multo maior A B, quam G. Vt uero A B, ad G, ita est rectilineum A B C, ad rectilineum D E F, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. Igitur cum A B, maior sit, quam G, erit quoque rectilineum A B C, maius rectilineo D E F: quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est A B, recta quam recta D E. Sed neque minor erit eadem ratione;

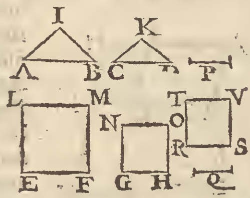
ne; quia & rectilineum A B C, minus ostenderetur rectilineo D E F; quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ A B, D E.

SCHOLION.

EODEM *modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, ut hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id; quod a secunda est descriptum, æquale sit ei, quod a tertia, eo quod & linea secunda sit æqualis tertiæ; manifestum est, quod proponitur.*



BREVIVS *tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primo esse ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico esse quoque ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Cum enim sit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Itē proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H: erunt proportiones A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium A B, ad C D; & E F, ad G H. Quod est primum.* 19. uel 20. sexti.

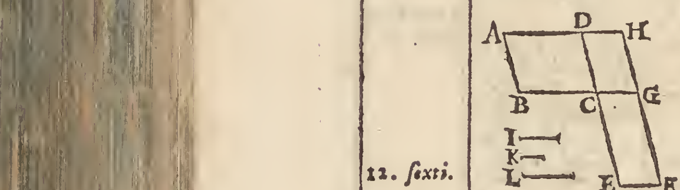


Rursus ponatur secundo esse, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoque ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Cum enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D; & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum. 19. uel 20. sexti.

24. THEOR. 17. PROPOS. 23.

AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SINT parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut B C, C G, efficiant unam lineam rectam; Quo facto, cum anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec conueniant in H. Sumpta iam recta I, quacunque, inueniatur tribus B C, C G, & I, quarta proportionalis K:



12. *sexti.* Item tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, ut B C, ad C G, ita A C, ad C H; Vt autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K; erit quoque ut A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, ut H C, ad C F, ita K, ad L. Ex æquo igitur erit, ut A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; hoc est, ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque

1. *sexti.* 11. *quinti.* 22. *quinti.*

demque ratione ostendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos rectos, ut B C, C E, efficiant unam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

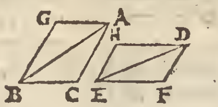
SCHOLION.

Expeditivs idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, ut prius; Cum sit ut A C, ad C H, ita B C, ad C G: & ut C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum. 1. sexti.

Demonstrat hoc in loco Federicus Commandinus nonnulla alia ad compositionem proportionum pertinentia non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

Triangvla, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam. I.

Sint *triangula* A B C, D E F, *angulum* C, *angulo* F, *habentia æqualem. Dico proportionem trianguli* A B C, *ad triangulũ* D E F, *compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione* B C, *ad* E F, *& ex proportione* A C, *ad* D F; *Vel ex proportione* B C, *ad* D F *& proportione* A C, *ad* E F.



Completis enim parallelogrammis C G, F H, *erunt ea æquiangula; atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur*. Cum ergo triangula A B C, D E F, *cum ipsis, quorum sunt dimidia, eandem habeant proportionem; Erit* 23. sexti. 15. sexti.

quoque proportio A B C, *ad* D E F, *composita ex proportioni-bus laterum* B C, A C, *ad latera* E F, D F.

II. PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

Hoc, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos 23. Sint enim tres proportiones A, *ad* B; C, *ad* D; *&* E, *ad* F. *Oportet iam ex ipsis unam proportionem componere. Fiat ut* A, *ad* B, *ita* G, *ad* H; *& ut* C, *ad* D, *ita* H, *ad* I; *& ut* E, *ad* F, *ita* I, *ad* K. *Dico proportionem* G, *ad* K, *compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim composita sit ex proportionibus* G, *ad* H; H, *ad* I; *&* I, *ad* K, *per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus* A, *ad* B; C, *ad* D; *&* E, *&* F; *quod his illæ sumptæ sint æquales.*

III. PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

Sit proportio A, *ad* B, *minor auferenda ex proportione maiore* C, *ad* D. *Fiat, ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* E; *statuaturque* E, *terminus medius inter* C, *&* D. *Dico ablatam esse proportionem* A, *ad* B, *ex proportione* C, *ad* D, *reliquamque esse proportionem* E, *ad* D. *Cum enim proportio* C, *ad* D, *componatur ex proportionibus* C, *ad* E, *&* E, *ad* D: *Si proportio* C, *ad* E, *hoc est* A, *ad* B, *auferatur, relinquetur proportio* E, *ad* D.

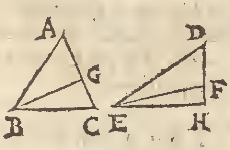
IIII. TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateri-bus

bus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT *triangula* ABC, DEF, *angulum* A, *angulo* D, *habentia æqualem. Dico esse* ABC, *ad* DEF, *ut rectangulum sub* AB, AC, *ad rectangulum sub* DE, DF. *Ductis enim ad* AC, DF, *perpendicularibus* BG, EH, *erunt triangula* ABG, DEH, *æquiangula, vt constat ex coroll.* 1. *propos.* 32. *lib.* 1. *cũ duo ãguli* A, AGB, *duobus angulis* D, DHE, *sint æquales. Igitur erit, ut* GB *ad* BA, *ita* HE, *ad* ED: *Vt autem* GB, *ad* BA, *ita est rectangulum sub* BG, AC, *ad rectangulum sub* AB, AC. (*Nam si bases ponantur* GB, BA, *erit eorum eadem alitudo* AC) *Et eadem ratione, ut* HE, *ad* ED, *ita est rectangulum sub* EH, DF, *ad rectangulum sub* DE, DF. *Rectangulum igitur sub* BG, AC, *ad rectangulum sub* AB, AC, *est, ut rectangulum sub* EH, DF, *ad rectangulum sub* DE, DF; *& permutando, rectangulum sub* BG, AC, *ad rectangulum sub* EH, DF, *ut rectangulum sub* AB, AC, *ad rectangulum sub* DE, DF. *Sed ut rectangulum sub* BG, AC, *ad rectangulum sub* EH, DF, *ita est triangulum* ABC, *ad triangulum* DEF, *quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia.* (*Habent enim easdem cum illis bases* AC, DF, *altitudinesque easdem* BG, EH; *ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.*) *Igitur erit quoque triangulum* ABC, *ad triangulum* DEF, *ut rectangulum sub* AB, AC, *ad rectangulum sub* DE, DF. *Quod est propositum.*

4. sexti.

1. sexti.



11. quinti.

15. quinti.
41. primi

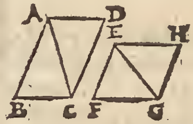
V.

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.

SINT *parallelogramma* ABCD, EFGH, *æquiangula inter se, quorum anguli* B, & F, *sint æquales. Dico esse,*

 ut

ut B D, *ad* F H, *ita rectangulum sub* A B, B C, *ad rectangulum sub* E F, F G. *Ductis enim diametris* A C, E G, *quæ angulos æquales* B, F, *subtendant, habebunt triangula* A B C, E F G, *angulum* B, *angulo* F, *æqualem. Quare, ut iam demonstrauimus, erit, ut* A B C, *ad* E F G, *ita rectangulum sub* A B, B C, *ad rectangulum sub* E F, F G. *Cum ergo parallelogramma* B D, F H, *eandem habeant proportionem, quam triangula* A B C, E F G,

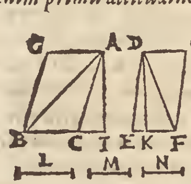


15. quinti. *ipsorum dimidia; Erit quoque ut* B D, *ad* F H, *ita rectangulum sub* A B, B C, *ad rectangulum sub* E F, F G. *Quod est propositum.*

11. quinti.

VI. TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent cōpositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula A B C, D E F, *& parallelogramma* C G, E H, *quorum altitudines* A I, D K. *Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis* B C, *ad basin* E F, *& proportione altitudinis* A I, *ad altitudinem* D K. *Sint enim primū altitudines æquales, bases uero uel æquales etiā, uel inæquales: Fiatque, ut* B C, *ad* E F, *ita* L, *ad* M; *Vt autem* A I, *ad* D K, *ita* M, *ad* N. *Quo facto, erit* M, *ipsi* N, *æqualis, quod &* A I *ipsi* D K, *æqualis ponitur; Ac proinde erit* L, *ad* N, *ut* L, *ad* M, *hoc est, ut* B C, *ad* E F. *At uero, ut* B C, *ad* E F, *ita est triangulum* A B C, *ad triangulum*



7. quinti.

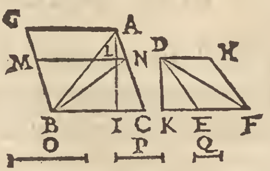
1. sexti.

D E F, *& parallelogrammum* C G, *ad parallelogrammum* E H. *Igitur quoque erit, ut* L, *ad* N, *ita triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *& parallelogrammum* C G, *ad parallelogrammum* E H; *Sed proportio* L, *ad* N, *composita est ex proportione* L, *ad* M, *hoc est, basis* B C, *ad basin* E F; *& ex proportione* M, *ad* N, *hoc est, altitudinis* A I, *ad altitudinem* D K. *Proportio ergo trianguli* A B C, *ad triangulum* D E F,

& pa-

& parallelogrammi C G, ad parallelogrammi E H, ex eiſdem proportionibus eſt compoſita. Quod eſt propoſitum.

SINT iam altitudines A I, D K, inæquales, & A I, maior; baſes vero B C, E F, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt A I, ad D K, ita O, ad P; & vt B C, ad E F, ita P, ad Q. Abſciſſa deinde I L, æquali ipſi D K; ducatur per L, ipſi B C, parallela L M, ſecãs A C, in N, iungaturq; recta B N. Quoniam igitur eſt triangulum A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad



parallelogrammum C M, ut altitudo A I, ad altitudinem IL, vel ad D K, ipſi I L, æqualem, hoc eſt, ut O, ad P, per ea, quæ ad 1. propos. huius lib. oſtendimus: Et ut triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, ita eſt, baſis B C, ad baſin E F, (cum eadẽ ſit altitudo) hoc eſt, ita P, ad Q. erit ex æquo A B C, ad DEF, & C G, ad E H, ut O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc eſt, altitudinis A I, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc eſt, baſis B C, ad baſin E F: Ex eiſdem proportionibus componetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod eſt propoſitum. 1. ſexti.

EODEM pacto oſtendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, compoſita eſſe ex ꝑportione baſis EF, ad baſin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinẽ A I. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius, erit triangulũ DEF, ad triangulũ NBC, & parallelogrammũ EH, ad parallelogrammum C M, vt EF, ad BC, hoc eſt, ut Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, ſeu D K, ad A I, hoc eſt, vt P, ad O. Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, 1. ſexti.

EF,

E F, ad B C, & ex proportione P, ad O, hoc est, D K, ad A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eisdem proportionibus.

22. THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

Esto parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctũ I, ducantur duę rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogrãma circa diametrũ, nępe E G, F H, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam angulus G A E, idem est qui angulus B A D; & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æquiangulum est E G, ipsi B D: Et eadẽ ratione eidem B D, æquiangulum erit F H. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum A G I, æquiangulum sit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, ut perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. uel etiam ex coroll.

4. *sexti.* propos. 4. huius lib. erit ut A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus erit ut B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item ut C A, ad C D, ita I A, ad I E. Ex æquo igitur, ut B C, ad C D, ita

22. *quinti.* G I, ad I E; ac propterea & latera circa angulos B C D, G I E, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrã-

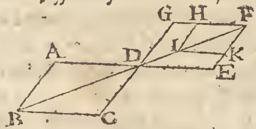
mum

mum F H, simile esse eidem parallelogrammo B D; atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum. 21. sexti.

SCHOLION.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius, esse talia, quæ habeant unum angulũ cum toto parallelogrammo communem, ut manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrãmi productam consistat parallelogrammum aliud; ita ut duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, uel certe illa his sint parallela, ijsdem fere mediis ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter B D, sit producta ad F, circa quam consistat parallelogrammum D E F G, cuius



duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, simile esse parallelogrammo A C. Quod enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno A D G; huic autem æqualis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. Quare his oppositi C, & E, æquales quoque erunt. 34. primi *Rursus quia anguli A D C, G D E, ad uerticem, sunt æquales,* 15. primi *erunt his quoque oppositi A B C, G F E, æquales. Igitur æquiangula sunt G E, A C, parallelogramma.* 34. primi *Quod autẽ latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulũ sit triangulo D G F; & triangulum B C D, triangulo D E F, vt constat ex propos. 29. lib. 1. Erit vt B A, ad A D, ita D G, ad G F.* 4. sexti. *Rursus vt A D, ad D B, ita G F, ad F D; & ut D B, ad D C, ita F D, ad F E; ac propterea ex æquo vt A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse.*

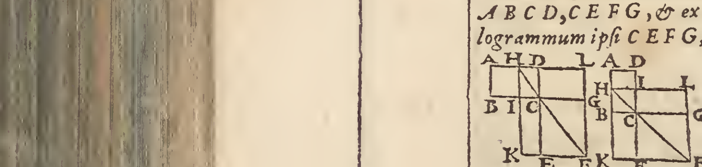
Quare

Quare ſimilia ſunt parallelogramma A C, G E. Quod ſi circa eandem diametrum conſiſtat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonſtrabitur. Nam productis A D, C D, donec occurrant rectis F K, F H, productis in E, & G; erit H K, ſimile ipſi GE, ut Euclides demonſtrauit: Atqui eidem G E, ſimile eſt quoq;
21. ſexti. *A C, vt nunc oſtendimus. Igitur & H K, A C, inter ſe ſimilia ſunt. Quod eſt propoſitum.*

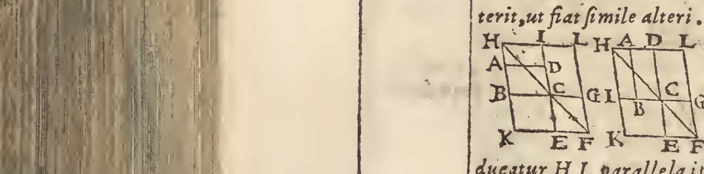
SED & abſoluemus cum Peletario ſequens problema.

DATIS duobus parallelogrammmis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare.

DVO parallelogramma æquiangula, ſed non ſimilia, ſint A B C D, C E F G, & ex A B C D, abſcindendum ſit parallelogrammum ipſi C E F G, ſimile. Coniungantur ambo ad angulos æquales B C D, E C G, ita ut ſit una linea recta B C G, & propterea ut ad ppos. 15. lib. 1. demõſtratum eſt, ECD, quoq; una recta linea. Deinde ducta diameter FC, producatur, donec in H, ſecet uel latus A D, uel latus A B; & per H, ducatur H I, parallela ipſi A B, vel ipſi A D. Dico parallelogramum abſciſſum H C, ſimile eſſe ipſi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum; Quare inter ſe ſimilia, vt Euclides demonſtrauit in hac propoſitione.

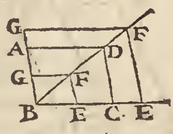


EADEM autem arte fere alterutrum ipſorum augeri poterit, ut fiat ſimile alteri. Sit enim augendum A B C D, ut fiat ipſi C E F G, ſimile. Coniungantur vti prius, & diameter F C, extendatur, donec in H, ſecet uel latus B A, protractum, uel latus D A, protractum. Deinde per H, ducatur H I, parallela ipſi A D, uel ipſi A B, donec ſecet vel C D, protractam, uel CB, protractam in I. Dico parallelogrãmum auctum H C, ſimile eſſe parallelogrammo C F. Nam ſi com-



compleatur totum parallelogrammum K L, *consistent H C, CF, circa diametrum; Quare similia inter se erunt.*

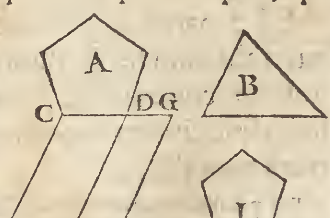
PERSPICVVM *autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis a nobis propositi in hoc Scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia; Verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo* A B C D, *si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus unum, nẽpe* B C; *Atque ex E, quolibet puncto ultra C, ipsi C D, parallela E F, ducenda, secans diametrũ* B D *productã in F; & per F, ducenda F G, parallela ipsi* A D, *occurrens rectæ* B A, *productæ in G. Erit enim parallelogrammum G E, simile similiterque positum ipsi* A C, *& maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, ut prius, ceu figura indicat.*



PROBL. 7. PROPOS. 25. 25.

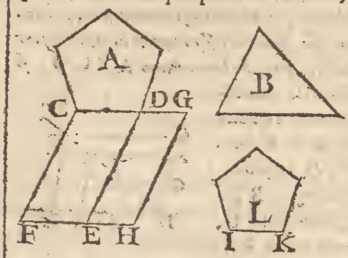
DATO rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale uero ipsi B. Super C D, unum latus rectilinei, cui simile debet constitui, constituatur parallelogrãmum C E, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam D E, in angulo E D G, qui æqualis sit angulo D C F, parallelogrammum D H, æquale ipsi B; eritque C D G, linea 44. uel 45. primi.



una

una recta, nec nõ F E H, ceu demonstratum fuit propos. 45.
13. *sexti.* lib. 1. Inueniatur iam inter rectas C D, D G, tertia propor-
18. *sexti.* tionalis I K, super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positũ. Dico L, æquale etiã esse alteri rectilineo B. Cũ enim sint proportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit per coroll. propos. 20. huius lib. ut C D, prima ad D G, tertia, ita A, rectilineum super primam C D, ad rectilineum L, super I K, secundam simile similiterq; descriptũ.



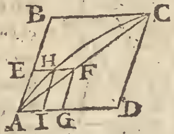
1. *sexti.* Vt autem C D, ad D G, ita est parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiusdem altitudinis. Igitur erit ut C E, ad D H, ita A, ad L. Vt autẽ C E, ad D H, ita est A, ad B, propter æqualitatem parallelogrammorum, & horum rectilineorum. Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; pro-
11. *quinti.*
9. *quinti.* ptereaq; æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum,

23. THEOR. 19. PROPOS. 26.

SI a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

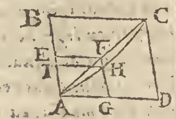
Ex parallelogrammo B D, abscissum sit pallelogrammũ E G, simile similiterq; positum, habens cum ipso angulũ cõmunem E A G. Dico E G, consistere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ si fuerint una linea

linea recta, perspicuum est, cum A F, sit diameter ipsius EG, & A C, diameter ipsius B D, parallelogrammum E G, consistere circa diametrũ A F C, totius parallelogrammi. Quod si A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter A C, secans latus E F, in H puncto, per quod ipsi F G, parallela agatur H I. Quoniã igitur parallelogramma B D, E I, sunt circa eandem diametrum A H C, ipsa erunt similia, similiterq; posita. Quare erit ut B A, ad A D, ita E A, ad A I: Sed ut B A, ad A D, ita quoque est E A, ad A G; quod parallelogramma B D, EG, ponantur similia, similiterque posita. Igitur erit ut E A, ad A I, ita E A, ad A G. Ac propterea æquales erunt rectæ A I, A G; pars, & totum; quod est absurdum.



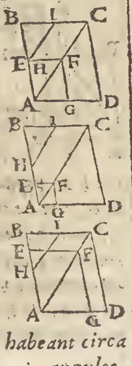
24. *sexti.* 11. *quinti.* 9. *quinti.*

QVOD si dicatur recta A H C, secare alterum latus FG; Tunc ducta H I, parallela ipsi E F, erunt rursus similia parallelogramma B D, IG, similiterq; posita. Quare erit ut DA, ad AB, ita GA, ad A I: Sed ut DA, ad AB, ita quoque est G A, ad A E, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG; Igitur erit ut G A, ad A I, ita G A, ad A E; ideoq; æquales erunt rectæ A I, A E; pars & totum: Quod est absurdum. Itaq; si a parallelogrãmo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.



24. *sexti.* 11. *quinti.* 9. *quinti.*

SCHOLION.



ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiue, hoc modo. Diuisis lateribus A B, B C, *bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue supra, siue infra; ducantur rectæ H I, A F. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est ut A B, ad* B C, *ita A E, ad E F; Vt autẽ tota A B ad totam* B C, *ita est dimidia HB, ad dimidiam B I; Erit ut H B, ad B I; ita A E, ad E F. Triangula igitur H B I, A E F, cum habeant circa*

15. *quinti.* 11. *quinti.*

angulos

angulos æquales B, E, latera proportionalia, erunt æquian-

6. *sexti.* 

gula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF.

28. *primi* *Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniā uero recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, parallela quoq; est rectæ HI.*

2. *sexti.* *propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc constituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, ut ducta recta AC, eadem fiat quæ AF, transeatq; per punctum F; cum ex puncto A, solum una linea parallela rectæ HI, possit duci, ut manifestum est. Consistunt ergo BD, EG, parallelogramma circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.*

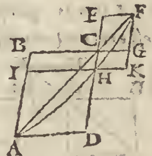
QVOD *si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra aliud, hac tamen lege, ut ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus ijsdem fere medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungãtur, ut lineæ BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15 lib. 1, ostendimus, lineæ DC, CE, unam quoq; lineã rectam componant. Dico parallelogrãma BD, EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, unam rectam lineam conficere. Si enim AC, FC, nõ faciunt unam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD, occurrens rectæ FE, productæ in K. Quoniam igitur parallelogrãma BI, KG, circa eandem diametrum AHF, productam consistunt, efficiuntq; duæ rectæ BH, HI, cum duabus rectis HG, HK, lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq; posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit ut HB, ad BA, ita FK, ad KH. Habet autem CB, maior ad BA,*

8. *quinti.* *maiorem proportionem, quam HB, minor ad eandem BA; &*

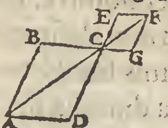
est

est ut C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur similia similiterque descripta: Igitur & F E, ad E C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quàm H B, ad B A, hoc est, quam F K, ad K H. Quã obrem cum F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam F K, ad eandem K H, erit F E, maior quam F K; pars quam totum: Quod est absurdum. 10. quinti.

QVOD si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta rectæ B C, parallela H I, quæ occurrat rectæ F G, protractæ in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut H D, ad D A, ita F K, ad K H. Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionẽ, quam H D, ad D A; Et est ut C D, ad D A, ita F G, ad G C, propterea quod parallelogramma B D, E G, similia similiterque posita sunt concessa; Igitur & F G, ad G C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam F K, ad K H; ideoque F G, maior erit, quam F K, pars quam totum: Quod est absurdum. 8. quinti. 10. quinti.



OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum B D, E G, anguli B, E, sunt æquales, estque ut A B, ad B C, ita C E, ad E F; habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia, ac idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos B C A, E F C, æquales. Addito ergo communi angulo B C F, erunt duo anguli B C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales; sed hi inter parallelas B C, E F, æquales sunt duobus rectis. Quare & B C A, B C F, duobus erunt rectis æquales; Ac propterea A C, F C, unam component rectam lineam. Quod est propositum. 6. sexti. 29. primi 14. primi



RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiã similiter positũ, vt ostẽdatur circa eandẽ cũ toto diametrũ. Nam si ex altera parte longiori B D, abscindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum consistens,

24. sexti. *erit E G, ipsi B D, simile similiterque positum. At vero si in rectangulo I L, quod sit æquilaterū ipsi B D, sumatur H M, æqualis ipsi E , & M N, æqualis ipsi A E, &c. erit quidem rectangulum M O, æquale & simile rectangulo E G, propter æqualitatē laterum, & angulorum, qui sunt recti, & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistit circa eandem cum toto I L, diametrum.*

I DEM quoque hic perspicitur in rectangulis, quorum unū est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se connexa, ut duo latera unius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus E G, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum: At vero M O, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cū prorsus sit æquale ipsi E G. Nam K M, æqualis est ipsi E F, & M N, ipsi E C, &c.

26. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod a dimidia describitur; maximū id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammū simile existens defectui.

DETVR recta A B, diuisa bifariam in C, superq; eius dimidiam B C, constituatur quodcunque parallelogrammū C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum paralle-

parallelogrammum A B E H, erit parallelogrāmum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundū A B, deficiens parallelogrammo C E, & existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum, deficiensque parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quę secundum A B, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus, similiterq; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, utcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis A B, B E; erit parallelogrammum F K, secundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, quod ipsi C E, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum C E, diametrum. Quoniam uero complementa C G, G E, æqualia sunt; si addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E: Est autem C I, æquale ipsi C F, propter bases æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoq; communi C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius sit gnomone L M, (continet enim C E, præter gnomonē parallelogrāmum adhuc D G,) erit quoq; A D, æquale existens ipsi C E, propter bases ęquales A C, C B, maius quam parallelogrammum A G, eodem parallelogrammo D G. Eodemq; modo ostendetur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, ut punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam dimidia A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.

24. *sexti.* 43. *primi* 36. *primi* 36. *primi*

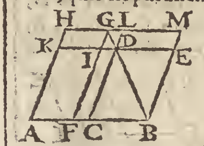
ALITER demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo. Parallelogramma F D, D I, sunt æqualia, cum bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius quam G E, hoc est, quam complementum C G, sibi æquale, parallelogrammo D G; Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Ac idcirco addito communi C F, maius erit A D, quam A G, parallelogrāmo eodem D G.

36. *primi* 43. *primi*

QVOD si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta

 H M,

HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq; rectis AK, BE, protractis in H, & M; Itē ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammū AG, applicatum secundum rectam AB, deficiēs parallelogrammmo FM, quod ipsi CE, est simile similiterque positū, cum sit circa eandem diametrum cum CE; Dico adhuc maius esse AD, ipso AG. Protracta enim



24. sexti.

CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, ideoque æqualia parallelogramma HD, DM. Cum igitur DM, sit æquale complemento DF, erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL, Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis cōcludes AD, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam dimidia AC, habetque maiorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

34. primi

36. primi

SCHOLION.

MANIFESTUM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidia AC, qualis est AK, in priori figura, uel minorem, cuiusmodi est AF, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur uel in diametro BD, uel in ea producta ad partes D.

27.

PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis

lis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

Ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, super medietatem E B, describatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale est ipsi C, cum sit applicatum ad A B, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D, factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus erit. Nam cum per præcedentem ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari ullum ad A B, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora: Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoq; sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua uero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad ppos. 45. lib. 1.) & cōstituatur parallelogrammū K L M N, simile quidem ipsi D, seu ipsi E G, æquale uero excessui inuento I, ut sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul, & ob id maius quam K M. Cum igitur ob similitudinem sit ut E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, uel minora, esset etiam E G, æquale ipsi N L, uel minus, ut constat. Quare abscissis rectis F O, F Q, quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipsi 18. sexti. 25. sexti.

L N, æquale, & eidem simile similiterque positum, & pro-
26. *sexti.* pterea ipsi E G : atque adeo circa eandem diametrum cum
E G, consistet, quæ sit B F. Productis iam rectis Q P, O P, erit

parallelogrammũ A P, ad rectam
A B, applicatũ, deficiẽs parallelo-
24. *sexti.* grãmo P B, quod simile est ipsi E G,
& propterea ipsi D. Dico igit. A P,
æquale esse ipsi C, rectilineo. Nã
43. *primi* cũ P G, æquale sit cõplemẽto P E,
si addat. cõmune P B, erit & B Q,
æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S,
36. *primi* quod æquale est ipsi E R, pro-
pter bases æquales E A, E B. Quare si æqualibus A O, B Q,
commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed
gnomon T V, æqualis est rectilineo C. (Nam cum E G,
parallelogrammum æquale sit ipsi C, una cum L N; si aufe-
rantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C,
æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam
ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens
parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrãmo
D, & æquale rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

MOVENT hoc in loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Qua de re consule eorum commentarios.

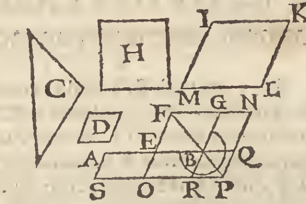
PERSPICVVM autem ex dictis est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C; Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratũ C B; continebitur quoq; A C, sub segmentis A D, D B, per applicationẽ factis.

PROBL.

PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

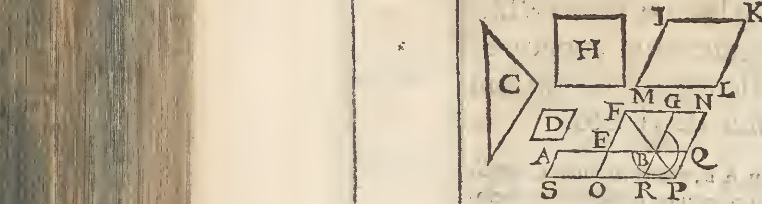
AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B, bifariam in E; super dimidiam E B, construatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum. *18. sexti.* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G con stituatur quadratum H, æquale, cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile uero ipsi E G, similiterque positum; *14. secundi* *25. sexti.* eritque propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod cõstructũ est rectilineo C, una cum parallelogrammo E G, ęquale. Cum igitur ob similitudinẽ M K, E G, sit ut M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoq; latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, uel



minora, esset quoque M K, uel æquale ipsi E G, uel minus, ut perspicuum est. Productis igitur F E, F G, ut rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrã mo O N, erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cũ sit æquale ipsi M K, & simile. Quare ON, E G, circa eandem diametrum consistent, quæ sit F P. *26. sexti.* Productis iam A B, G B, ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniat in S; erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, quod simile est ipsi E G, ac propterea ipsi D. *24. sexti.* Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. Nam cũ A O, E R, sint æqualia; & E R, ęqua *36. primi*

 le

43. *primi* le complemento B N, erit & A O, ipsi B N, æquale; Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni EPN. Atqui gnomon EPN, æqualis est rectilineo C, (nam cum M K, hoc est, O N, æquale sit rectilineo C, una cum E G; Si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P N, & rectilineũ C.) Igitur & A P, æquale erit



rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est A P, excedens parallelogrãmo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatã, extrema, ac media ratione secare.

Sit recta A B, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; ad latus D A, applice-
29. *sexti.* tur rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato, eritq; propterea A F, quoq; quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet deinde recta E F, rectam A B, in H. Dico A B, in G, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint D F, & A C; si dematur commune A E, remanebunt æqualia G H, H C; quæ cum habeant angulos æquales A H F,
14. *sexti.* B H E, utpote rectos; erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit ut E H. hoc est, ut A B, sibi æqualis, ad H F, hoc est, ad A H, sibi æqualem, ut A H, ad H B. Quare secta est A B, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineã terminatam, &c. Quod erat faciendum.

ALITER

ALITER ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitq; rectangulum HC, comprehensum sub prima AB; & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; erunt ipsæ proportiona- 17. sexti.
les, ut AB quidẽ ad AH, ita AH, ad HB. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

ALITER totum problema conficiemus. Diuidatur AB, in C, ita ut rectangulum sub to- 11. secundi
ta AB, & segmento CB, æquale sit

quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. Erunt enim rursus, ut prius, tres 17. sexti.
lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.

SCHOLION.

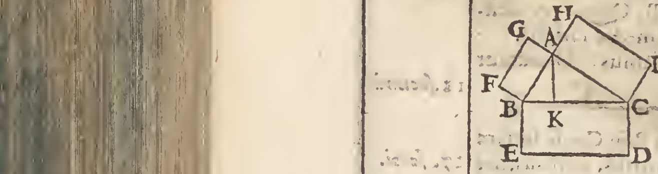
HABET admiranda hæc sectio lineæ extremæ ac mediæ ratione insignes utilitates, proprietatesque, ceu in libris Stereometriæ manifestum erit, ut nõ sine causa a plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilẽ eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs uero simpliciter uocetur diuisa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum subtendẽte descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ a lateribus, rectũ angulum continentibus describuntur.

TRIANGVLVM rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectũ; describaturq; super BC, quæcunq; figura rectilinea BCDE, cui similes similiterq; positæ super 18. sexti.
AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK; erit per corollarium propos. 8. huius

huius lib. ut B C, ad C A, ita C A, ad C K. Quare ut B C, ad C K, prima linea ad tertiã, ita figura B D, super primã, ad figuram C H, super secundam similiter positã, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. & conuertendo ut C K, ad B C; ita figura C H, ad figurã B D. Non secus ostendetur, esse quoque ut B K, ad B C, ita figuram B G, ad figurã B D; cum tres lineæ B C, B A, B K, sint quoq; proportionales, &c. Quoniã igitur est ut C K, prima quantitas ad B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut B K, quinta quantitas ad B C, secundam, ita B G, sexta ad



24. *quinti.* B D, quartam; erit ut prima C K, cum quinta B K, ad B C, secundam, ita tertia C H, cum sexta B G, ad B D, quartã. Sunt autem prima C K, & quinta B K; simul æquales secundæ B C; ergo tertia C H, & sexta B G, simul æquales quoque erunt quartæ B D. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. Quod erat ostendendum.

8. *sexti.* ALITER. Cum triangulo A B C, simile sit triangulũ K A C, sintq; homologa latera ipsorum BC, CA; (Nam est ut B C, ad CA, in triãgulo ABC, ita CA, ad C K, in triãgulo
19. *sexti.* K A C) habebit triangulũ K A C, ad triangulũ A B C, duplicatã proportionem eius, quam habet C A, ad B C. Habet autẽ
19. *uel* 20. *sexti.* & figura C H, ad figuram B D, proportionẽ duplicatã proportionis C A, ad B C. Quare erit ut triangulũ K A C, ad
11. *quinti.* triangulum ABC, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione ostendetur esse, ut triangulũ K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rursus est, ut K A C, prima quantitas ad A B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut K B A, quinta ad ad ABC, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam; erit &
24 *quinti.* prima K A C, composita cum quinta K B A, ad secundam ABC, ita composita tertia, C H, cum sexta BG, ad quartam B D. Sunt autẽ KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC: Igitur & C H, BG, tertia & sexta simul, æquales erunt quartæ B D.

ALITER. Vt quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita est figura C H, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem,

titatem, cum utraque proportio sit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit ut quadratũ rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundã quantitatẽ, ita figura B G, sexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nẽpe quadratũ rectę A C, cum quadrato rectæ A B, ad secundã, hoc est, ad quadratũ rectæ B C, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, nempe ad figuram B D: Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, simul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt.

19. uel 20 sexti.

24. quinti.

47. primi

SCHOLION.

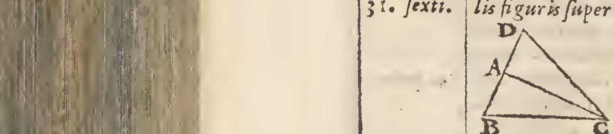
VIDES igitur, longe esse uniuersalius theorema hoc Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, ut propos. 47. primi lib. monuimus. Est tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, adhuc vniuersalius hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisque etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisque similibus, & similiter positis, proponatur.

CONVERTEMUS etiam theorema hoc ex Campano nõ aliter, quam 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab uno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETUR triangulum A B C, sitque figura quæuis super latus B C, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera A B, A C. Dico angulũ B A C, esse rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ sit ipsi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniã igitur angulus C A D, rectus est, erit figura super C D, (quæ similis

similis sit ei, quæ super B C, similiterque posita) descripta æqua-
31. sexti. *lis figuris super A D, A C, descriptis, quæ ei similes sint, simi-*

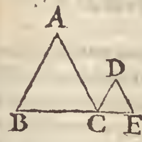


literque positæ: Est autem figura super AD, æqualis figuræ super AB, ob æqualitatem la-
terum; Quare figura super CD, æqualis erit figuris super A B, A C. Cum igitur figura super B C, eisdē figuris super A B, BC, *æqua-*
lis ponatur; erunt figuræ super C D, BC, inter se æquales, ac
propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, ut constat ex lemmate
propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trian-
guli A D C, æqualia sunt lateribus AB, AC, trianguli ABC;
& basis D C, ostensa est quoque æqualis basi B C; erunt anguli
8. primi D A C, B A C, *æquales. Quare cum* DAC, *rectus sit, ex con-*
structione, rectus quoque erit BAC; *quod est propositum.*

30. THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela; tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineā collocata reperiētur.

HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE; componanturque ad angulum A C D, ita ut latera homologa A B, D C; Item A C, D E, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua B C, CE, rectam cōponere lineam. Cum enim parallelæ sint AB, DC, erit angulus A, alter-



29. primi no ACD, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa erūt inter

inter se æquiãgula, habebuntq; æquales angulos B,& DCE. Additis ergo æqualibus A,& ACD, erunt duo anguli B,& A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales sunt duobus rectis; ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: Ac idcirco BC, CE, unam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

6. sexti.

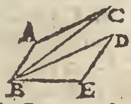
32. primi

14. primi

SCHOLION.

DEBENT autem prædicta duo triangula ita secundum vnum angulum esse composita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula cõponuntur; veluti in schemate theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quẽ triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum uterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.

QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triãgula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compositaque sunt ad angulum CBD, ita vt tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, ut perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

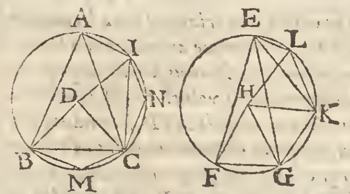


THEOR.

32. THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper uero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem insistãt anguli B D C, F H G; ad circunferentias uero anguli B A C, F E G. Dico esse ut arcũ B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad angulum F H G; & angulum B A C, ad angulum F E G; & sectorem B D C, qui rectis B D, D C, & arcu B C, continetur, ad sectorem F H G, quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G. Ductis enim rectis B C, F G, applicentur ipsis in circulis æquales rectæ, C I, quidem ipsi B C, At uero G K, K L, ipsi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales sunt rectæ B C, C I, erunt quoque æquales arcus B C, C I, ac propterea anguli B D C, C D I, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus F G, G K, K L, & anguli F H G, G H K, K H L. Quã multiplex ergo est arcus B C I, ipsius arcus B C, tam multiplex erit angulus B D I, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui B C I, anguli B D C: Et quã multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G, tam multiplex erit angulus F H L, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui F G K L, insistentium, anguli F H G: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli B D I, F H L, in quot arcus æquales secti sunt arcus B C I, F G K L. Quoniã uero



1. quarti.

28. tertij.

27. tertij.

uero si arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, necessario angulus B D I, angulo F H L, æqualis est; Ac proinde si ar- 27. tertij.
cus B C I, maior fuerit arcu F G K L, necessario angulus B D I, maior est angulo F H L; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & angulus B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab F G K L, arcu, & angulo F H L, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartę F H G; uel una æqualia erũt; uel una excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent.
Quare quæ proportio est arcus B C, primæ magnitudinis, 6. defin. 5.
ad arcum F G, secundam magnitudinem, ea erit anguli B D C, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

QVONIAM uero, ut angulus B D C, ad angulum F H G, ita est angulus B A C, ad angulum F E G, cum illi 15. quinti
horum sint dupli; perspicuum est, ita esse quoque angulum 20. tertij.
B A C, ad angulum F E G, ut est arcus B C, ad arcum F G. 11. quinti.
Quod tamen eisdem argumentis demõstrari potest, quibus usi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducãtur rectæ I A, K E, L E.

CONSTITVANTVR iam in segmentis B C, C I, anguli B M C, C N I, qui æquales erunt, cum insistant ar- 27. tertij.
cubus æqualibus B A C, C B A I: Quare similia erunt segmenta B M C, C N I, atque adeo inter se æqualia, propte- 24. tertij.
rea quod sint super rectas B C, C I, quæ inter se sunt æquales. Additis igitur triangulis B D C, C D I, quæ æqualia 4. primi.
quoque sunt, fient sectores B D C, C D I, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector B D I, sectoris BDC, quã est multiplex arcus B C I, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem F H L, tam multiplicem esse sectoris F H G, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniã uero si arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, sector quoque B D I, sectori F H L, æqualis est; (ceu in sectoribus B D C, C D I, ostensum fuit.) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & sector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab arcu F G K L, & sectore F H L, æque multiplicibus secundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; uel una æqualia erunt; uel una excedent; si ea sumantur,

quæ

6.defin.5. quæ inter ſe reſpondent. Quamobrem quæ proportio eſt arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, ſecundam magnitudinem, ea erit ſectoris B D C, tertiæ magnitudinis, ad ſectorem F H G, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM. I.

HINC manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, ut eſt angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem eſt proportioni arcus ad arcum. Quare & inter ſe eædem erunt. 11. quinti.

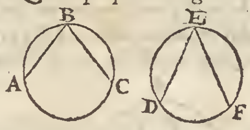
COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, ut eſt angulus ad centrum ad quatuor rectos, ita eſſe arcum ſubtenſum illi angulo ad totam circunferentiam. Et contra, ut ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ita eſſe totam circunferentiam ad arcum illi angulo ſubtenſum. Nam ut eſt angulus in centro ad angulum rectum in centro, ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad quadrantem angulo recto ſubtẽſum. 33. ſexti. Quamobrem erit ut angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circunferentiã, per ea, quæ ad 4. propos. lib. 5. demonſtrauimus. Quod eſt primum. Quoniam igitur eſt ut angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circunferentiam; erit & conuertendo, ut quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circunferentia ad arcum angulo in centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum. Verum hoc etiam ita demonſtrabitur. Cum ſit, ut angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto ſubtenſus ad arcum illi angulo ſubtenſum; 33. ſexti. erit quoque, per ea, quæ ad propos. 4 lib. 5. oſtendimus, ut quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circunferentia, ad arcum illi angulo ſubtenſum. Quod eſt propoſitũ.

SCHOLION.

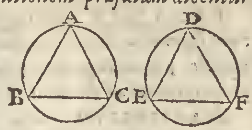
CAETERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitũ angulũ, qui circunferentiæ alicui inſiſtit, referendum eſſe ad arcũ, qui baſis eſt ipſius anguli, non autem ad arcum in quo exiſtit. Non enim eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, ſi ſumantur arcus, in quibus anguli exiſtunt, vt uult Euclides. in propoſito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales

æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentiam cõstituti sint B, E, maior quidem B, minor autem E. Quo posito erit arcus A C, maior arcu D F, ac propterea reliquus arcus A B C, minor reliquo arcu D E F. Quare proportio anguli B, ad angulũ E, est maioris inæqualitatis; proportio uero arcus A B C, ad arcum D E F, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum.



Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus A C, D F, tum demũ erit angulus B, ad angulum E, ut arcus A C, ad arcum D F, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

NON obscure quoque ex hoc theoremate deduci potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circunferentiæ similes, ad integras circunferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea qualis pars est una circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque sit alia circunferentia similis totius suæ circunferentiæ; veluti in expositione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentias constituantur æquales B A C, E D F; Quo posito, segmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circunferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circunferentias. Cum enim ob circulorum

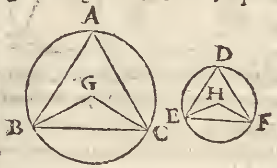


æqualitatem, arcus B C, E F, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circunferentias B A C, E D F, esse quoque æquales. Quare ad totas circunferentias, quæ æquales etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt: Atque idcirco, quæ pars est arcus B A C, totius circũferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D. 26. tertij.

SINT secundo duo circuli inæquales ABC, DEF, in qui bus anguli ad circunferentias constituantur æquales BAC, EDF. Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circunferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad

20. tertij. centra anguli G, & H, æquales, cum hi illorum dupli existant. Quare quatuor recti

7. quinti. ad angulum G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum H. Atqui ut quatuor recti ad angulum G, ita est tota



cicunferentia ABCA, ad arcum BC: Et ut quatuor recti ad angulum H, ita est tota circunferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. Igitur ut tota circunferentia

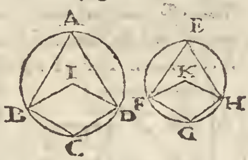
11. quinti. ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circunferentia DEFD, ad arcum EF. Diuidendo ergo erit, vt arcus BAC, ad arcũ BC, ita arcus EDF, ad arcum EF. Et conuertendo rursus, vt arcus BC, ad arcũ BAC, ita arcus EF, ad arcũ EDF. Ac propterea componendo, vt circunferentia tota ABCA, ad arcum BAC, ita circunferentia tota DEFD, ad arcum EDF. Et rursus conuertendo, ut arcus BAC, ad totam circunferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circunferentiam DEFD. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circunferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circunferentiæ DEFD.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales; quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

MANIFESTVM etiam est ex dictis, angulos insistentes arcubus circulorum similibus, siue ad centra, siue ad circunferentias insistant, æquales esse inter se. Sint enim in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, arcus similes BCD, FGH, quibus insistant, ad centra quidem anguli I, & K, ad circunferentias autem anguli A, & E. Dico tam illos, quam hos esse inter se æquales. Constituantur enim in dictis arcubus anguli

BCD,

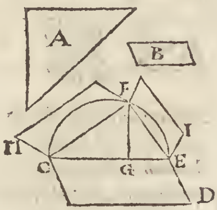
BCD, FGH, qui æquales erunt, ex defin. segmentorum similium; Sunt autem tam anguli C, & A, quam G, & E, duobus rectis æquales: Ablatis igitur æqualibus C, & G; reliqui A, & E; ac proinde eorum dupli I, & K, æquales erunt. 22. tertij.



VICISSIM quoq; liquet, arcus, quibus insistunt siue ad cẽtra, siue ad circunferentias, anguli æquales, similes esse. Nã si anguli A, et E, fuerint æquales; erunt & reliqui duorũ rectorũ C, & G, æquales. Igiť, p definitionẽ, arcus BCD, FGH, similes sunt, quibus dicti anguli A, & E, insistũt. Quod si I, & K, æquales sint, erũt et eorũ dimidij A, et E, æquales. Quare, vt prius, arcus BCD, FGH, similes sunt.

QVONIAM vero Euclides multa dixit de inuentione linearũ proportionaliũ, nihil vero de superficierũ, vel planorum proportionaliũ inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorũ multa circa inuentionẽ superficierũ proportionaliũ uersantur, scitu nõ iniucunda, loco appẽdicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic sexto libro annectam; quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducuntur; Hinc autem exordium capiemus.

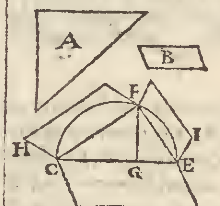
A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum. I.



SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterque posita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B, simile, & similiter positũ. Cõstituatur rectilineũ CD, æquale quidẽ ipsi A, simile vero ipsi B, superq; vnũ eius latus CE, semicirculus describatť CFE. Deinde ablata parte tertia GE, imperata uidelicet, ex CE, agať GF, ad CE, ppendicularis, cõnectanturq; rectæ CF, EF, sup quas cõstruanť rectilinea 25. sexti. 9. sexti. 18. sexti.

 FH,

18. sexti. F H, F I, similia similiterque posita ipsi C D. Dico igitur factum esse, quod iubetur. Cum enim angulus C F E, rectus sit,
31. tertij. quippe qui in semicirculo existit; erit rectilineum C D, æquale rectilineis H F, F I; atque adeo si auferatur rectilineum
31. sexti.



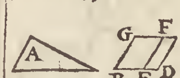
F I, simile ipsi B, ex rectilineo C D, hoc est, ex sibi æquali A, relinquetur rectilineũ H F, simile quoque ipsi B. Quod autem rectilineum ablatum F I, sit tertia pars rectilinei C D, ita ostendetur. Quoniam est ut recta

4. sexti. C G, ad G F, ita recta C F, ad F E,
8. sexti. eo quod triangula, C G F, C F E, sint similia: Habet autem C G, ad G E, proportionem duplicatam proportionis C G, ad G F, propterea quod proportionales sint tres rectæ C G, G F, G E, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectilineum H F, ad rectilineum F I,

19. vel 20. sexti. proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, F E; Erit vt recta C G, ad G E, ita rectilineum H F, ad rectilineum F I; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, ut C E, ad G E, ita duo rectilinea H F, FI, simul, hoc est, rectilineum C D, quod est illis æquale, ad rectilineum F I. Est autem C E, ipsius G E, tripla, per constructionem; Igitur & rectilineum C D, triplum erit rectilinei F I. Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.

Q*VOD* si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte. Rectilineum datum A,

45. primi reuocetur ad parallelogrammum B C,



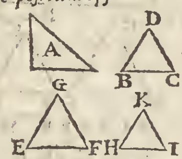
sibi æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata, & per E, agatur ipsi C D, parallela E F. Dico E C, tertiam esse partem ipsius B C, hoc est, rectilinei dati A. Cum

1. sexti. enim sit vt D E, ad D B, ita E C, ad C B: sit autem per constructionem D E, ipsius D B, pars tertia; erit & E C, ipsius C B, tertia pars. Quod est propositum.

II. **D**VOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

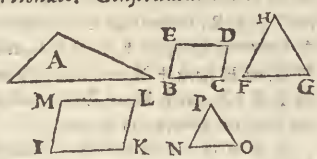
SINT

Sint data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniẽdum sit tertium proportionale. Constituatur ipsi A, rectilineum æquale EFG, simile vero similiterque positum ipsi BCD. 25. *sexti.*
Deinde lateribus homologis EF, BC, *inueniatur tertia linea proportionalis* 11. *sexti.*
HI, *super quam constituatur rectilineũ* HIK, *simile similiterque positum ipsis* 18. *sexti.*
EFG, BCD. *Dico* HIK, *esse tertium proportionale. Cum enim proportionales sint rectæ* EF, BC, HI, *erunt & rectilinea* EFG, BCD,
HIK, *ab illis descripta (cum sint similia, similiterque posita) proportionalia.* 22. *sexti.* *Cum ergo* EFG, *per constructionem, æquale sit ipsi* A; *erunt & rectilinea A*, BCD, HIK, *proportionalia.*



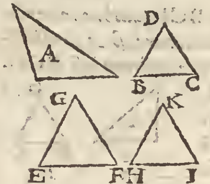
TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire. III.

Tria rectilinea data sint A, BCDE, FGH, *quibus quartum sit inueniendum proportionale. Construatur rectilineum* 25. *sexti.*
IKLM, *æquale quidem ipsi* A, *simile vero similiterq; positum ipsi* BCDE. *Tribus deinde rectis* IK, BC, FG, *inuenta quarta proportionali* 12. *sexti.*
NO, *constituatur super* NO, *rectilineum* NOP, *ipsi* FGH, 18. *sexti.*
simile similiterque positum. Dico NOP, *rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ* IK, BC, FG, NO, *sint proportionales, erunt & rectilinea similia similiterq; posita ab ipsis descripta* IL, BD, FGH, NOP, *proportionalia.* 22. *sexti.*
Cum igitur IL, *constructum sit æquale ipsi* A; *erunt & quatuor rectilinea* A, BD, FGH, NOP, *proportionalia.*



DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire. IIII.

Sint duo rectilinea A, BCD, *quibus medium inueniendum est proportionale. Constituatur rectilineum* EFG, *æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi* BCD. 25. *sexti.*
Duabus deinde rectis EF, BC, *inuenta media proportionali* HI, 13. *sexti.*
construatur super HI, *rectilineum* HIK *simile similiterq; positum* 18. *sexti.*



tum ipsis EFG, BCD. *Dico* HIK, *medium esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres re-ctæ* EF, HI, BC, *erunt quoque recti-*
22. sexti. *linea ab ipsis descripta* EFG, HIK, BCD, *proportionalia, cum sint simi-lia similiterque posita, &c.*

ALITER. *Sit rursus inter rectilinea A, & B, perqui-rendum mediū proportionale. Constituatur*

45. primi *tur ipsi A, æquale parallelogrammū quod-cunque* CDEF; *Ipsi vero* B, *æquale pa-*
25. sexti. *rallelogrammū* EGHI, *simile uero simi-literque positum ipsi* CDEF: *Connectanturque hæc paralle-logramma ad angulos æquales, ut* DE, EI, *efficiant unam li-neam, ac propterea, per ea, quæ ad 15. propos. 1. lib. demonstra-uimus, una quoque linea componatur ex* FE, EG; *perficia-turque totum parallelogrammum* KL. *Dico vtrumlibet* EK, *vel* EI, *medium esse proportionale inter* DF, GI, *hoc est, in-ter* A, & B. *Cum enim similia sint, similiterque posita* DF, GI, *erit vt* DE, *ad* EF, *ita* EI, *ad* EG. *Permutando ergo vt*
1. sexti. DE, *ad* EI, *ita* FE, *ad* EG. *Vt autem* DE, *ad* EI, *ita* DF, *ad* EK; & *ut* FE, *ad* EG, *ita* EK, *ad* GI. *Igitur vt* DF, *ad* EK, *ita* EK, *ad* GI, *&c.*

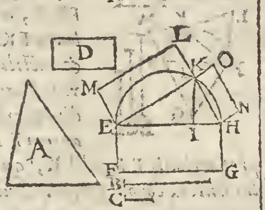
QVOD *etiam in hunc modum confirmari potest. Cum* DF, GI, *similia sint, similiterque posita, consistent ea circa*
26. sexti. *eandem diametrum. Quare complementa* EK, EL, *æqualia erunt. Vt autem* DF, *ad* EK, *ita est* EL, *ad* GI, *eo quod*
1. sexti. *vtraque proportio eadem sit proportioni* DE, *ad* EI. *Igitur erit, vt* DF, *ad* EK, *ita* EK, *ad* GI.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia cō-stituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se pro-portionem propositam quamcunque.

SIT *datum rectilineū A, dataq; proportio rectæ* B, *ad* C, *oporteatq; constituere duo rectilinea, quæ ipsi* A, *æqualia sint, ha-beantq; proportionem, quam* B, & C; *ac similia similiterque po-sita sint rectilineo cuius* D. *Constituatur rectilineum* EFGH,
25. sexti. *æquale ipsi* A, & *simile similiterque positum ipsi* D. *Diuiso deinde*

deinde latere eius E H, in I, secundum proportionem B, ad C.
(quod facile fiet, si conficiatur vna linea ex B, & C. Nam tunc
similiter secanda erit E H, &c.) describatur circa E H, semicir 10. sexti.
culus E K H, & ex I, ducatur ad E H, perpendicularis I K, con
nectanturq; recta E K, H K. Describantur iam ex E K, K H,
rectilinea E K L M, K H N O, ipsi E G, vel ipsi D, similia si- 18. sexti.
militerq; posita; quæ dico æqua
lia etiã esse ipsi E G, seu ipsi A;
habereque proportionem datam
B, ad C. Cum enim angulus
E K H, in semicirculo existens 31. tertij.
rectus sit, erunt rectilinea E L,
H O, æqualia rectilineo E G, cũ 31. sexti.
sint similia inter se, similiterq;
descripta. Quoniam uero est, vt

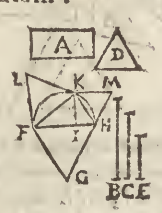


E I, ad I K, ita E K, ad K H, cum triangula E I K, E K H, simi 4. sexti.
lia sint; Est autẽ E I, ad I H, in proportione duplicata proportio-
nis E I, ad I K; quod tres E I, I K, I H, sint, ex corollario pro-
pos. 8. lib. huius, proportionales: Item E L, ad H O, in proportio
ne duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homologum 20. sexti.
K H; erit vt E I, ad I H, hoc est, ut B, ad C, ita E L, ad H O. Da
to ergo rectilineo A, exhibuimus duo æqualia E L, H O, quæ si-
milia sunt, similiterque posita dato rectilineo D, habentque pro-
portionem inter se datam B, ad C.

VI.

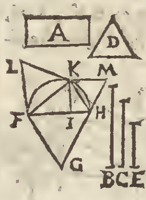
DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio rectæ B, ad rectam C; oporteatque constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorũ latera homologa proportionẽ habeãt, quã B, ad C. Inuẽta ipsis B, C, tertia proportionali E, fiat rectilineũ F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positũ ipsi D. Diuisoq; latere F H, in I, secundũ proportionẽ B, ad E; describatur circa F H, semicirculus F K H; et ex I, ducatur ad F H, perpendicularis



I K,

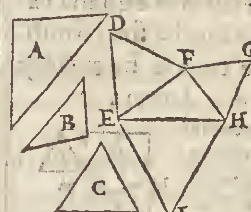
IK, connectanturque rectæ F K, H K. Describantur iam ex F K, H K, rectilinea FKL, HKM, ipsi F G H, vel ipsi D, similia, similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, eorumque latera homologa F K, H K, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C. Cum enim angulus



31. tertij. FK H, in semicirculo rectus sit, erunt recti-
31. sexti. linea FK L, H K M, rectilineo FGH, idemq; & rectilineo A, æqualia. Quoniã vero est,
4. sexti. vt F I, ad I K, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum F I K, F K H: Est autem F I, ad I H, in proportione duplicata proportionis F I, ad I K, (quod tres F I, I K, I H, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) Ac propterea in proportione duplicata proportionis laterũ homologorũ F K, H K. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex cõstructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio F K, ad H K, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicatæ proportiones F I, ad I H, & B, ad E, æquales sunt.

VII. DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.

DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendũ, simile similiterq; positum ipsi C. Fiat ipsi A, æquale



25. sexti. DEF, simile autẽ similiterque positũ ipsi C. Itẽ ipsi B, æquale constituatur G F H, simile vero eidem C, similiterq; positũ. Deinde rectilinea DEF, GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa E F, F H, constituant angulum E F H, rectũ, cui subtendatur recta EH, ex qua
8. sexti. describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C. Perspicuum autem est EHI, æqua-
31. sexti. le esse duobus D E F, GFH; atque idcirco duobus A, & B.

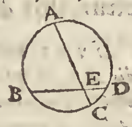
BREVIVS, Cõstituatur parallelogrammũ æquale duobus

bus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum E H I, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum E H I, æquale duob⁹ rectilineis A, B, & simile, similiterq; positũ rectilineo C. 25. sexti.

VIII.

Si in circulo duæ rectæ lineę se se mutuo secuerint: Erunt segmenta unius segmentis alterius reciproca.

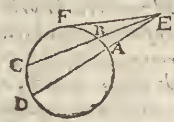
In circulo A B C D, se mutuo secent rectæ A C, BD, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmẽtis B E, E D: Hoc est, esse vt A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel ut A E, ad E D, ita B E, ad E C. Cum enim rectangulum sub A E, E C, comprehensum æquale sit rectangulo sub BE, E D, contento; erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum. 35. tertij. 14. sexti.



IX.

Si extra circulum sumatur punctũ aliquod, ab eoque in circulum cadãt duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hęc media proportionalis inter quamlibet rectam, quę circulum secet & eius segmentum exterius.

Extra circulum A B C D, sumatur punctum E, a quo cadant rectæ EC, E D, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB, esse reciprocas rectis E D, E A: Hoc est, esse, vt E C, ad E D, ita E A, ad E B: Vel ut E C, ad E A, ita E D, ad E B. Ducta enim E F, tangente circulum in F, erit rectangulum sub EC, E B, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, E A, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula sub EC, E B, & sub E D, E A, æqualia erunt: Ac propterea latera eorũ circa angulos æquales reciproca. Quoniã autẽ quadrato rectæ EF, æquale est rectangulũ sub E C, E B: Item rectangulũ sub ED, EA, erunt tres rectæ EC, EF, EB. Itemq; 36. tertij. 14. sexti. 36. tertij.

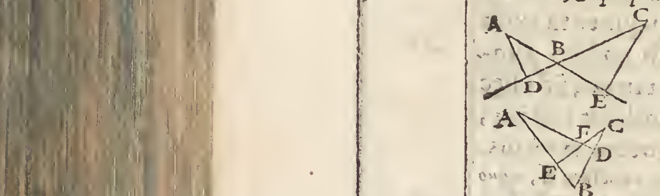


tres

tres E D, E F, E A, proportionales, atque adeo E F; media proportionalis inter quamlibet lineam quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

X. SI duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & a duobus eorum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum una inter terminũ, & sectionẽ, altera uero inter eundẽ terminũ, & suá perpendicularem interijcitur, alijs duab⁹ eodẽ modo inclusis reciproce.

DVAE rectæ A B, C B, se mutuo secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares, A D, quidem ad C B, at uero C E, ad A B; quæ perpendiculares cadent in A B, C B, protractas ultra B, si angulus A B C, fuerit obtusus; in ipsas vero introrsum, si idem angulus acutus fuerit, ut figuræ indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B; posterior verò inter sectionem B, & perpendicularẽ suam C E, quæ nimirum ad ipsam A B, ducitur) reciprocas esse duabus C B, B D, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt A B, ad B C, ita B D, ad B E: Vel vt A B, ad B D, ita B C, ad B E. Cum enim anguli A B D, A D B, trianguli A B D, æquales sint angulis C B E, C E B, trianguli C B E. (Nã A D B, C E B, recti sunt; & A B D, C B E, ad verticem in priori figura, in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula A B D, C B E, æquiangula. Quare



4. sexti. *erit vt A B, ad B D, ita C B, ad B E: Ac propterea permutando quoq;, vt A B, ad B C, ita B D, ad B E. Quod est propositum.*

PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium A D, C E, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula A F E, C F D, sint æquiangula; erit

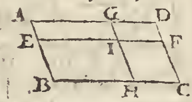
4. sexti. *vt A F, ad F E, ita C F, ad F D: Et permutando quoque, vt A F, ad C F, ita F E, ad F D.*

XI. IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelo-

grammum

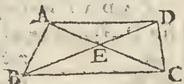
grammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

In parallelogrammo A B C D, duæ rectæ E F, GH, lateribus A D, D C, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma E G, G F, B I, I C, esse proportionalia. Cũ enim sit, vt E I, ad I F, ita EG, 1. *sexti.* *ad G F: Item vt E I, ad I F, ita B I, ad I C; Erit quoque ut EG, ad G F, ita B I, ad I C, quod est propositum.* 11. *quinti.*



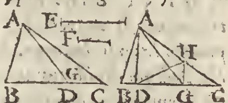
OMNE quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia. XII.

DIVIDANT diametri A C, BD, se mutuo secantes in E, quadrilaterum A B C D. Dico quatuor triangula A E D, C E D, A E B, CEB, esse proportionalia. Erit enim vt A E, ad E C, ita triangulum A E D, ad 1. *sexti.* *triangulum C E D; & triangulum A E B, ad triangulum CEB. Quare vt triangulum A ED, ad triangulum CED; ita triangulum A EB, ad triangulum CEB. Eademq; ratione ostendes esse ut B E A, ad DE A, ita BEC, ad DE C, cum vtraq; proportio eadem sit proportioni B E, ad E D. Constat ergo propositum.*



A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam. XIII.

SIT triangulum A B C, oporteatque a dato puncto D, in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmẽta secundum proportionem datam E, *ad* F. *Diuidatur* BC *in* G, *secundum proportionẽ* E, *ad* F, *cadatq; primo punctum* G, *in datum punctum* D, *ducaturq; recta* D A. *Quoniam igitur est vt* B D, *ad* DC, *ita triangulum* B D A, *ad triangulum* 1. *sexti.* CDA, *secabit recta* DA, *triangulum datum secundum proportionem datam* BG, *ad* GC, *hoc est,* E, *ad* F.

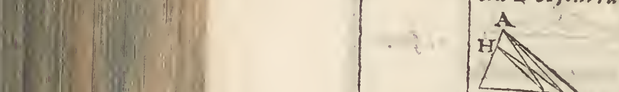


CADAT secundo punctum G, inter C, & D. *Ducatur ergo recta* DA, *cui per G, parallela agatur G H, coniungaturq; recta*

recta DH. *Dico rectam* DH, *secare triangulum datum se-*
cundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium BDHA,

ad triangulum CDH, *vt* E, *ad*
F, *seu vt* BG, *ad* GC. *Ducta enim*
recta GA, *erunt triãgula* HGA,
37. *primi* GHD, *æqualia, cum sint super*
eandem basin GH, *& inter easdẽ parallelas* GH, DA. *Addito*
igitur communi triangulo CGH, *fiet æqualia triangula* CGA,
7. *quinti.* CDH: *Ac proinde triangulum* ABC, *eandem habebit propor-*
tionem ad CGA, *& ad* CDH. *Diuidendo igitur, erit vt trian-*
17. *quinti.* *gulum* BGA, *ad triangulum* CGA, *ita trapezium* BDHA,
1. *sexti.* *ad triangulum* CDH. *Est autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad*
GC. *Igitur erit & trapezium* BDHA, *ad triangulũ* CDH, *vt*
BG, *ad* GE, *hoc est, ut* E, *ad* F. *Quod est propositum.*

CADAT *tertio punctum* G, *inter* B, *&* D, *ducaturq; re-*
cta DA, *cui rursus per* G, *agatur parallela* GH. *Dico igitur,*



rectam ductã DH, *secare triangulum* ABC,
secundum proportionem datam E, *ad* F, *hoc*
est, esse triãgulum BDH, *ad trapezium* CD-
HA, *ut* E, *ad* F. *Ducta enim recta* GA, *erunt,*
37. *primi* *vt prius triangula* HGA, GHD, *æqualia; additoq; communi*
BGH, *æqualia fient* BGA, BDH. *Quare erit* ABC, *ad*
7. *quinti.* BGA, *vt ad* BDH. *Diuidendo ergo erit vt* CGA, *ad* BGA,
17. *quinti.* *ita trapezium* CDHA, *ad triangulum* BDH; *& conuerten-*
do, vt BGA, *ad* CGA, *ita* BDH, *ad trapezium* CDHA. *Est*
1. *sexti.* *autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur &* BDH, *ad*
trapezium CDHA, *erit ut* BG, *ad* GC, *hoc est, vt* E, *ad* F.
Quod est propositum.

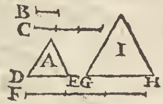
HINC *perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ a quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dato puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionẽ multiplicem, cuius denominator vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifestũ est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis, cum priori denominatori proportionis multiplicis addatur unitas, quæ ante deerat.*

DATO

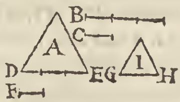
DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, uel minus, secundum proportionem datam. XIIII.

SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positũ sit describendum maius, secundum proportionem datam B, *ad* C. *Tribus rectis* B, C, *&* DE, (*sit autem* DE, *vnum latus recti linei dati quodcunque*) *inueniatur quarta proportionalis* F. *Deinde duabus* DE, *&* F, *inueniatur media proportionalis* GH, *super quam ipsi A, describatur rectilineum* I, *simile, similiterque positum.* Dico I, *maius esse quã A, secundum proportionem datam* B, *ad* C. *Cum enim proportionales sint tres rectæ* DE, GH, *&* F, *erit per coroll. propos.* 19. *vel* 20. *libri huius, ut* DE, *prima ad* F, *tertiam, hoc est, per constructionem* B, *ad* C, *ita rectilineum A, super primam ad rectilineum* I, *super secundã, illi simile similiterq; positum.*

12. sexti.
13. sexti.
18. sexti.



NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, *describemus, illi simile similiterque positũ, secundum proportionem datam* B, *ad* C. *Ceu in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.*

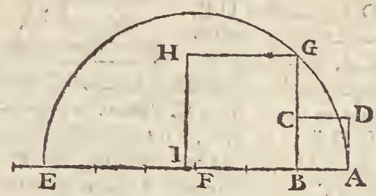


FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineũ duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, etc. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum & quadratorum eadem remanet similitudo. Si namq; proportio B, *ad* C, *sumatur ut* 1. *ad* 2. *vel* 1. *ad* 3. *vel* 1. *ad* 4. *&c. Item vt* 2. *ad* 1. *vel* 3. *ad* 1. *vel* 4. *ad* 1. *&c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptũ, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.*

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunq; oblatum. Ex hac enim construemus quoq; rectilineum simile, similiterque descriptum cuicun-

cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio a præcedenti differt, vt mox ostendemus.

Sit igitur quadratum A B C D, quincuplicandum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi A B, æquales, a puncto B, incipiendo, vsque ad E, vt sit B E, quincupla ipsius A B. Diuisa deinde tota AE, bifariã in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producaturque latus B C, ad circunferentiam vsque in G.

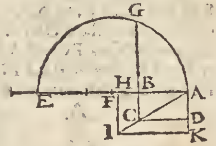


Dico quadratum B G H I, ex BG, descriptum, quincuplum esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter E B, BA. Igitur erit ut E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum secundæ, ad A C, quadratum tertiæ, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem E B, per constructionem, ipsius AB, quincupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quincuplum erit. Quod est propositum. Quod si recta B E, sumatur sexcupla lateris A B, erit & quadratum rectæ B G, quadrati A B C D, sexcuplum: Si autem B E fuerit tertia pars ipsius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad A B, eandẽ habebit quadratum B H, ad quadratũ AC.

Sit rursus rectangulum ABCD, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere A B, producto sumatur B E, dupla ipsius A B. Diuisa deinde tota A E, bifariã in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit B G, unum latus rectanguli quæsiti: Quare si abscindatur AH, æqualis ipsi B G, & p H, agatur ipsi B C, parallela H I, occurrens diametro A C, protracta in

24. sexti. I, perficiaturque parallelogrammum H K, erit H K, ipsi B D, simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius B D.

B D. *Cum enim proportionales sint tres rectæ* E B, B G, B A, *ex corollario propos. 13. huius lib. Erit vt prius, sicut* E B, *prima ad* B A, *tertiam, ita rectangulũ* H K, *supra* A H, *secundã (sumpta enim fuit* A H, *ipsi* B G, *secundæ æqualis) ad rectangulum* B D, *supra tertiam* A B, *quod est simile similiterque descriptum.*



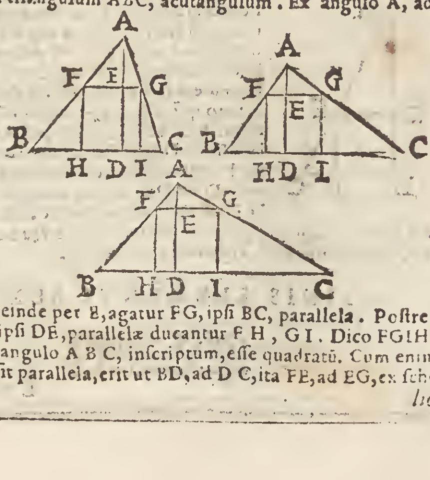
E O D E M *modo, si supra* A B, *constitutum fuerit quod cunque rectilineum, erit quod ex* B G, *illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex* B G, *ad rectilineum simile ex* A B, *quam habere ponetur recta* E B, *ad rectã* B A, *ex constructione.*

P E R S P I C V V M *autem est, hanc operationem vna cũ eius demonstratione a nostra antea tradita nõ differre, nisi quod hæc simul tradat inuentionem mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuũ lineas* E B, B A, *quæ proportionem habẽt datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.*

EX FEDERICO COMMANDINO.

I N dato triangulo quocunque quadratum describere.

S I T datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo A, ad BC, perpẽdicularis demittatur AD, quæ in E, ita secetur, per ea, quæ in Scholio propos. 10 huius libri docuimus, ut eadẽ sit proportio AE, ad ED, quę

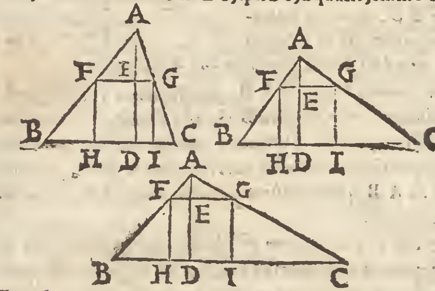


A D, ad B C. Deinde per E, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur F H, G I. Dico FGIH, rectilineum triangulo A B C, inscriptum, esse quadratũ. Cum enim F E G, ipsi C, sit parallela, erit ut BD, ad D C, ita FE, ad EG, ex scho

lio

lio propos. 4.huius lib.& componendo, ut B C,ad D C, ita FG, ad E G.Sed ut D C,ad AD,ita est EG,ad A E; ꝙ per coroll. ꝑpos.4.huius lib.triangula ADC, AEG,sint similia. Igitur erit ex æquo, ut B C,ad AD,ita FG,ad A E. Quia uero per constructionem est, ut A D,ad BC,ita A E,ad ED; erit rursus ex æquo, ut BC, ad BC,ita F G,ad E D.Est autem BC,ipsi BC,æqualis,immo eadem: Aequalis igit est & F G, ipsi ED. Quare cũ FG,ipsi HI;& ED, ipsis F H, G I, æquales existant; Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F,æqualia inter se.

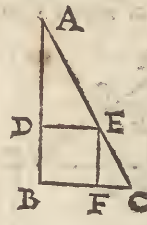
34. primi



29. primi

Et quia anguli E D H,F H D, duobus rectis æquales sunt: Est autem EDH, per constructionem rectus: erit & F H D,rectus. Quocirca, per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2.demonstrauimus, & reliqui anguli H FG, FGI,GIH, recti sunt; Ac propterea F I, quadratũ est. quod est propositum.

NON secus idẽ problema absoluemus,si datum triangulum fuerit rectangulum uel obtusangulum, dummodo ex angulo recto,uel obtuso perpendicularem demittamus, ceu in posterioribus duobus triangulis apparet.



QVOD si in triangulo rectangulo quadratũ describere libeat,ita ut duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulũ rectũ nitantur, diuidemus perpẽdicularẽ AB,in D, ita ut eadẽ sit proportio A D,ad DB,quæ AB,ad BC,& per D,quidem ipsi B C,parallelã ducemus DE; per E,uero ipsi AB,aliã parallelã EF.

4. sexti.

Quoniã igitur est,ut B C, ad AB,ita DE,ad AD; quod triãgula ABC, ADE,similia sint,per coroll. ꝑpos.4.huius lib. Est autẽ per cõstructionẽ,ut AB,ad BC, ita AD,ad DB. Erit ex æquo,ut BC,ad BC,ita D E,ad DB: Est autem BC,sibi ipsi æqualis,immo eadem. Aequalis igitur est & D E,ipsi DB. Quare ut prius,DEFB, quadratum est. Quod est propositum.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

EVCLIDI

EVCLIDIS ELEMENTVM VII.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quā unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana uersatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio linearū requiratur, idque adeo, ut absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque usum, neque exprimi queant, neque intelligi: Nam pleraque laterū sunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel certe, si non sunt Irrationales, longitudine inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, ac intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, ut absque his nullo modo cognoscantur, oportuit etiam numerorū explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioque constaret, lineis *anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur. Incipiens igitur more ſuo a principijs, definit initio unitatem, docetque eam eſſe, ſecundum quam unumquodque eorum, quæ ſunt, unum eſſe dicitur: Nam ſecundum unitatem unum lapidem, unum animal, unum corpus, &c. dicere ſolemus. Cæterum unitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, ut in primo lib. docuimus.*

II.

NVMERVS autem, ex unitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus compoſita, manifeſtum eſt, numerũ quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes; Ita vt vnitas ſit pars cuiuiuis numeri denominata ab ipso numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nempe vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum quælibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

EX his ſequitur, omnes numeros, quotcunque ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos una eademque menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cum plurimæ illarum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, ut clariſſime lib. 10. oſtendetur.

III.

PARS eſt numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON

NON est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; ut 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodẽ modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem nõ metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cũ eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars est huius numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, nõ autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura utrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita ut si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum unitas, eorum cõ-

munis mensura, illum metiatur per 6. hunc uero per 10. Idem iudicium habeto & in reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc in loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantum eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, ceu propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes uero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris: cum eæ persæpe sint incommensurabiles, ut aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides in quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX uero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo ut numerus maior, cuius minor est pars, sit uicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si vero maiorem minor nō metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex: Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem nō metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus eſt, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, ſiue in duas partes æquales, cum eorum dimidia ſint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR uero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui unitate differt à pari.

Omnes hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia unitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. uel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perſpicue colligi poteſt, vnitatem in numeris prorſus eſſe indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi poſſet. Nam huius imparis 11. dimidia pars eſſent quinque vnitates & ſemis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parē.

Qvia numerus par eſt, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. Metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pari-

ter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CAETERVM si recte duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit, fieri posse, ut unus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar uocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum; ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neque pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari potest pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis

clidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponũt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. ubi manifeste omnem numerũ parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parẽ appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habẽt impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec solum pariter pares, nec solum pariter impares illi sint. Sed hæc planius in lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparẽ. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem unitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura, metitur.

SICVT numerus ille, quem sola vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tamquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis, illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem uero isti 2. 4. tamen nullus istorum vtrunque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter se dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quiuis numerus, dici possunt, licet impropriè, numeri inter se primi: quia sola vnitas unitatem, & numerum quemuis metitur.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quem numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes

nes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe compoſiti, licet non quilibet ſit compoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quiſpiam metitur, compoſitus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compoſiti inter ſe ſunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe compoſiti erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorũ & ſe ipſum, & reliquos duos metitur, licet per ſe ſumptus, Primus nocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. ſexies fuerit compoſitus, toties nimirum, quot ſunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoque contra numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. ſi numerum 6. octies ſumpſerimus, toties ſcilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusque eundem numerũ 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic ſumptus

ptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procrearive ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. uel e contrario. Et sic de reliquis.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui uero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur,

ut latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latũ dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum uero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CAETERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides solum definit planum quadrangularem

rem rect angulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorũ mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quod omni ex parte quadrato geometrico, & figuræ altera parte longiori, similes sint, et æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatemue spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c: quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quoad ambitum: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuũ est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST *autem unus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.*

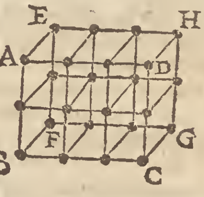
QVIA *vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum; Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam vnitatem producunt.*

XVII.

CVM uero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

Vt

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figurã quãdam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, ut lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 3. efficietur numerus 6. basis solidi numeri longa tres unitates, & lata duas: Et si hæc basis in 4. multiplicetur, hoc est, accipiatur quater, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens quatuor vnitatum. At si numerus 2. in 4. multiplicetur, habebitur basis 8. vnitatum, quæ multiplicata in 3. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 3. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit A B C D, duodecim vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B A, latitudo, tres complectitur; superponetur ei altera basis similis, & æqualis E F G H, ut totus numerus solidus contineat 24. vnitates, eiusque altitudo B F, vnitates duas. Similiter, si basis sit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor, & latitudo B F, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ duæ bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem B A, habens trium vnitatum. Si denique basis sit A B F E, sex vnitatum, cuius longitudo A B, tres continet, & latitudo B F, duas, superponentur illi tres aliæ bases similes, & æquales, constabitque totus numerus solidus unitatibus 24. quarum quatuor, altitudinem dabunt B C. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cũ ex his mutuo multiplicatis pducatˉ. Eodemq; modo de alijs numeris solidis iudicandũ erit.



DENIQVE

Denique & vnitas aliquando solidus appellabitur numerus, & si non proprie, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua earũ multiplicatione procreantes.

Definit autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, contineturque sub tribus numeris, omissis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam, quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

Planum illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium pro creatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius unitates in formã planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in omnibus lateribus habens quinque vnitates ideoque æqualiter æqualis erit.

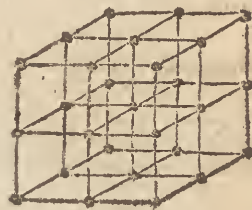
Alterutrer autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, uel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati a Geometris, radix uero ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

XIX.

CVBVS uero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoque illum numerum vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius unitates in longū, latum, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cū ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.



QVILIBET vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; uel eadem pars, uel eædem

partes:

partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, uel eaſdem partes.

Vt numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Definitio etenim uulgata Euclidis, quã puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſub multiplicive, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis: At uero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente; In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, nec æque multiplex eſt, nec eadem pars, nec eædem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 3. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nempe triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eædem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper

inſuper eandem partem, nempe ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In ultimo tandem primus ſecundum, & tertius quartum, bis, et præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, nõ ſit æque multiplex, uel eadem pars, uel eædem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus cõferuntur, quod primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, quod primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, uel eaſdem partes: Et contra; ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur; dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et e contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eædem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, ut proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra, eundẽ ad æquales eandem quoque habere proportionem; Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idẽ eandẽ habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædẽ partes; Vel certe eundẽ æqualiter cõtineant, eandemq; inſuper illius partem, vel partes; Item cum idem numerus æqualiũ ſit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædẽ partes: Vel

Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, uel partes; perspicuum est, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS *quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel æquemultiplices, uel eadem pars, uel eædem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, uel partes: Item quia idē numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eædem partes; Vel certe illos æqualiter continet. eandemque insuper illorum partem, uel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestum est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.*

PARI *ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionē, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.*

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

NON *necesse est, ut planus numerus plano numero sit similis, quælibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundū suas vnitates in formam planā redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniā illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. uel 12. 2.*

EODEM *modo, vt duo numeri solidi similes sint, nō requi-*

ritur, ut quævis tria unius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, ut tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. uel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, uel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, ut dictũ est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8 nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua uia, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. ultima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero; dici solet numerus ille, Abũdans: si uero minores, Diminutus.

HIS

His definitionibus ab Euclide propositis adiungendæ mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes uti uidentur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, illum producit.

Vt numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus secundum 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia uero vt propos. 16 huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, uel pars, partesue; uel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, uel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nempe quincuplus, dicetur *hæc comparatio, habitudoue Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60 confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.*

QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundum: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, ut ad magnitudines pertinet, copiose explicata fuit in quinto lib. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertiū, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus uerbis a nobis demonstratum est ad defin 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones uersantur, demōstrabuntur quoque in hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, uel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinite per additionem continuam unita-

tis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi pote'st, ille uidelicet, qui ex unius unitatis, uel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorũ, uel eiusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque multiplex est, uel æque multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualiũ numerorum, uel eiusdem, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, uel æquales, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per uni-

tates

tates, quæ in ipso sunt, hoc est; per ipsummet numerum metitur.

NAM unitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito unitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis unitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per unitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per unitatē.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquē produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A. numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15 numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, unitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

A .... B . . .
C . . . .

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT, quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quē metitur, uel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, uel multiplicatum a B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

A.... B...

C.............

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum BD. Cum enim A, metiatur ipsos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipsius

A, m lti-

A, multiplex: Diuiso ergo B C, in partes BE, EC, ipsi A, æquales, & ipso CD, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compositus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum B D, metitur. Quod est propositum.

A . . . .

B . . . . E . . . . C . . . . F . . . . G . . . . D

XI.

NVMERVS quemcunque numerũ metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quẽ B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum C D; erit C D, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo CD, in partes C E, E D, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compositum. Quod est propositum.

A . . .

B . . . .

C . . . . E . . . . D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quam B D,

ipsius

ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus D C, uel una pars numeri B C, ipſi A, æqualis, uel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipſi A, uel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C.

```
      A . . .
B . . . . . . . . . D . . . C
B . . . . . . . . . D . . . . . . C
```

Quod eſt propoſitum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus unquã metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit unitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

SINT duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt detrahatur:& reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatẽ G B, quæ quidem præcedentẽ numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, eſſe inter ſe primos; hoc eſt ſolam unitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter unitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D, & C D, numerũ A E, (quod C D, uel pars ſit ipſius A E, uel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) metietur quoque H, ipſum A E: At H, metitur quoque totum A B;

```
A . . . . . . . E . . G . B
   C . . . F . . D
      H ——
```

11. pron

A B; igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem EB, ipsum C F; Igitur & H, ipsum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, metietur quoque reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipsum E G; metietur etiã H, ipsum E G: Metiebatur autem & H, totum E B; Reliquam igitur unitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrẽ, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

12. pron.
11. pron.
12. pron.
11. pron.
12. pron.

SCHOLION.

CONVERTEMVS facile cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit unitas.

SINT duo numeri inter se primi A B, C D, quorũ minor C D, ex maiore A B, quoties potest, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam potest; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatẽ detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus G B, præcedentem F D, ex E B, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerum F D, metitur; & F D, ipsum E G; metietur quoque G B, ipsum E G. Cum ergo G B, & se ipsum metiatur; metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compositum: Metitur autem E B, ipsum C F; Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atq; adeo cũ & ipsum F D, positus sit metiri; metietur quoque C D, ex C F, F D, compositum: At vero C D,

A . . . . *E* . . *G* -- *B*
C . . . . *F* . . *D*

11. pron.
10. pron.
11. pron.
10. pron.

11. pron. *C D, metitur ipsum A E : Igitur & eundem A E, numerus G B, metietur: Ac proinde cum & ipsum E B, metiatur, vt ostensum est; metietur & A B, ex vtroque A E, E B, compositum.*

A . . . . E . . G ---- B

C . . . . F . . D

10. pron. *Quare cum numerus G B, metiatur numeros A B, C D, ipsi erunt inter se compositi Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus pracedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.*

EODEM modo & hoc demonstrabimus.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem usque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, ut Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nūquā reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, ut Euclides demonstrauit: Si uero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus utrunque numerum propositum metiatur; ut perspicuum est ex demonstratione superiori. Ex eo enim, quod reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, ostensum fuit, eundem reliquū G B, vtrunque A B, & C D, metiri.

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis

inter se, maximam eorum cõmunem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri A B, C D, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex maiore A B, quoties potest, relinquatq; E B, numerum, qui ex C D, subtractus relinquat F D, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidẽ peruenietur ad numerum, qui præcedentẽ metiatur. Nam si ad unitatẽ deueniretur, numeri A B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentũ 1. *septimi*
ergo iam sit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquat, sed eam metiatur. Dico F D, esse maximam mensuram communem numerorum A B, C D. Quod enim utrunq; metiatur, ita ostendemus. Quia F D, metitur ipsum E B; & E B, ipsum C F; metietur quoque F D, ipsum C F; atq; adeo cũ & seipsum metiatur, metie- 11. *pron.*
tur & totũ C D, ex C F, F D, compositum. At C D, ipsum 10. *pron.*
A E, metitur; Igitur & F D, eundem A E, metietur. Ac pro 11. *pron.*
pterea cum F D, metiatur quoque ipsum E B; metietur etiã totum A B, ex utroque A E, E B, compositum. Metitur 10. *pron.*
igitur F D, utrunquen umerum A B, C D.

A . . . . E . . . . . . B
C . . . . F . . D
G - - - - - -

QVOD autem F D, sit maxima mensura communis illoru, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrunque A B, C D; Et C D, metitur ipsum A E; metietur quoque G, ipsum A E. Igitur & residuum E B: At uero 11. 12. &
E B, metitur C F; Metietur ergo & G, eundem C F; Igitur 11. *pron.*
& residuum F D; maior minorem. Quod est absurdum. 12. *pron.*
Non ergo maior numerus, quã F D, numeros A B, C D, metitur; Ac proinde F D, maxima est mensura numerorum A B, C D.

QVOD si minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipse maxima

A . . . . B
C . . . . D

ma amborum mēſura communis, cum & ſe ipſum metiatur. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, quod numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorundem communem menſuram. Hęc elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit F D, eſſe maximam menſuram ipſorum A B, C D. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros A B, C D, metiri quoque numerum F D, maximam eorum menſuram cōmunem. Eademq; ratio eſt de cæteris.

SCHOLION.

Ex dictis facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter unitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

A . . . .
B . . . .
C . . . . .

Si vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numerum D, communem menſuram.

2. ſeptimi

A . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . .

Quod ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; Erunt C, & D, uel inter ſe primi, uel non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita ut habeant numerum communem menſuram, metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam

ximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autẽ C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. Inuenta enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se sunt compositi. Quod est propositum.

A . . . .
B . . . .
C . . . . . .
D . . . .

2. septimi

A . . . .
B . . . .
C . . . .
D . . . . E . . .

11. pron.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum cõmunem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensurã cõmunem oportcat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque

A . . . .
B . . . . D . . .
C . . . . . . E . . . F ---

2. septimi

quoque ipsum C; perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, nõ metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll. propos. 2 huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. Sit eorum

A . . . .
B . . . . D . . . .
C . . . . E . . . F . . . .

2. septimi maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura cõmunis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipsos A, & B; metietur

11. pron. quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

Qvod autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communẽ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc perspicuum est, quod numerus metiens tres numeros, metitur quoque maximam eorum communem mẽsuram. Hoc etiã colligitur ex ultima parte demonstrationis; Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum

merum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua uero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primo A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet unitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B.

A . . . . . .
B . . . .

SINT deinde A, & B, nõ primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito manifestum est A, partẽ esse numeri B.

A . . . . . .
B . . . .

SED iam A, non metiatur ipsum B; inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. Quia igitur C, pars est ipsius B, cũ ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F: Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

A . . D . . E . . F
B . . . .
C . .

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter

alterius eadem pars : Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit; quæ unus unius.

Sit numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico utrunque numerum A, & D, simul, utriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem; quæ est uel A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, EF, in partes BG, GC; EH, HF,

A . . . . . .   D . . . .

B. . . . . . G C   E. . . . H. . . . F

ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodē argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in BC, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, uel C, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterque A, & D, simul utriusque B C, & E F, simul, quę est A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Eodem modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera unitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul utraque unitas, uel unitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

Hoc

HOC autem perspicue in his appositis exẽplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A . D . . A . D . . .
B . G . C . E . H . F B . G . C . E . . . H . . . F

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorũ, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorũ eadẽ pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omniũ numerorum DE, FG, HI, simul eandem esse partẽ, quæ est A, ipsius DE.

A . . . . B . . . C . . .
D . . . . K . . . . E F . . . L . . . G H . . . M . . . I

Diuisis n. numeris DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partiũ numeri DE, æqualis multitudini partiũ tam numeri FG, quã numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addãtur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM; erunt quoq; A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erũt A, B, C simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatũ numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, cõtinetur. Quamobrẽ eadẽ pars erũt A, B, C, simul ipsorũ DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

IDEM sequitur, si loco unius numerorũ A, B, C, sumatur unitas, uel loco pluriũ, uel etiã omniũ, plures unitates, ut de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A . B . . C . . . A . B . C .
D . K . E F . . L . . G H . . . M . . . I D . K . E F . L . G H . M . I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

A .... B ...... C ....
D .... E ... F ..

QVOD si loco unius numerorum D, E, F, assumatur unitas, uel etiam loco plurium, uel omnium, plures unitates, theorema eodem modo demonstrabitur, ut ex sequentibus figuris apparet.

A .. B .... C ......   A .. B .. C ..
D . E .. F ...   D . E . F .

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul uterque utriusque simul eædem partes erit, quæ unus unius.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus

merus D E, numeri F. Dico utrunque numerum A B, & D E simul utriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ A B, ipsius C, uel D E, ipsius F.

A ... G ... B   D .... H .... E
C ....   F ....

Diuisis in numeris A B D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F, erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eædem partes est numerus A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri C, eadem est D H, numeri F; erit uterque A G, D H, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ A G, ipsius C, uel D H, ipsius F. Eadem ratione erit uterque G B, H E, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ G B, ipsius C, uel H E, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, cōtenta, partes eædem numerorum C, F, simul, quot partes eædem est numerus A B, ipsius C, uel D E, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit uterque numerus A B, D E, simul, utriusque numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. 5. *septimi*

SCHOLION.

SED & hanc propositionem ad quotcunque numeros extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ unus unius.

EADEM enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; ut hic perspicuum est.

A .. K .. B   C ... L ... D   E .... M .... F
G ....   H ....   I ....

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus A B, eadem pars numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F: Dico reliquum E B, eandem esse partem reliqui F D, quæ est totus A B, totius C D. Ponatur enim E B, numeri G C, eadem pars, quæ est A E, ipsius C F, uel totus A B, totius C D.

A . . . . E . . B
G . . . . C . . . . F . . . . D

Quia igitur A E, eadem est pars ipsius C F, quæ E B, ipsius G C; erit uterque A E, E B, simul eadem pars utriusq; simul C F, G C, quæ A E, ipsius C F, hoc est, quæ totus A B, totius C D; (5. septimi) Ac propterea cum A B, eadem sit pars utriusque numeri F G, C D; erunt ipsi numeri F G, C D, inter se æquales. Dempto ergo communi C F, æquales remanebunt G C, F D. Eadem igitur pars erit E B, ipsius F D, quæ ipsius G C, hoc est, quæ totus A B, totius C D. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

IDEM hoc theorema uerum est, etiam si ablata sit unitas A E; uel reliqua fuerit unitas E B; uel denique & ablata, & reliqua sit unitas, ut ex his exemplis apparet.

A . E . . . B *A . . . E . B* *A . E . B*
G . . . . . C . . F . . . . . . D *G . . C . . . . . . F . . D* *G . . C . . F . . D*

CAETERUM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, ut totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D; æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita esse multiplicem, ut est totus A B, totius C D. Cum enim A B, ipsius C D, sit æque multiplex, atque A E, ipsius C F; erit e contrario totus C D, totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E. Quare & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac proinde e contrario E B, ita multiplex erit ipsius F D, ut A B, ipsius C D, est multiplex. 7. septimi

A . . . . . . E . . . . B
C . . . F . . D

SI aliquando ex C D, ablata fuerit unitas C F; uel reliqua sit unitas F D: vel denique & ablata sit vnitas C F, & alia reliqua F D; idem demonstrabitur, ut hæc exempla commonstrant.

A . . . E . . . . . . B A . . . . E . . B A . . . . E . . . . B
C . F . . D C . . F . D C . F . D

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquũ E B, easdem esse partes reliqui F D, quæ totus A B, totius C D.

A . . . . . . K . . . . . . E . . . . B
C . . . . F . . . . . . D
G . . . . . . L . . I . . . . . . M . . H

Sumpto enim numero G H, ęquali ipsi A B; erit

GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, hoc eſt, quæ AE, ipſius CF. Diuiſo ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partiũ AK, KE, æqualis, eademque pars tam

A . . . . . . K . . . . . . E . . . . B

C . . . . F . . . . D

G . . . . . . L . . . I . . . . . M . . . H

GI, quam IH, ipſius CD, quæ tam AK, quam KE, ipſius CF. Cum ergo CD, numerus maior ſit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipſius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipſius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM æqualibus ipſis AK, KE; erit GL, eadem pars ipſius CF, quæ AK, eiuſdem CF, hoc eſt, quæ GI, ipſius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD ſit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, erit & reliquus LI,

7. ſeptimi reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento oſtendemus MH, eandem eſſe partem ipſius FD, quæ eſt totus GI, uel IH, totius CD. Quoniã ergo tam GI, quam IH, eadem eſt pars ipſius CD, quæ eſt tam LI, quam MH, ipſius FD; erit uterque GI, IH,

6. ſeptimi. ſimul eædem partes ipſius CD, quæ uterque LI, MH, ipſius FD. Eſt autem GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & uterque LI, MH, ſimul eædem partes erit ipſius FD, quæ AB, ipſius CD. Quia uero ſi ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, ſimul æquales ſunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nempe, quæ uterque LI, MH, ſimul erat eiuſdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

NON demonſtrauit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentẽ; quod nonnulli interpretes faciunt, quia non conſtabat hic, reliquum numerũ EB, alicuius numeri eaſdem eſſe partes, quæ eſt numerus AE, numeri CF; ibi uero perſpi-

perspicuum erat, reliquum E B, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est A E, ipsius C F. Licet enim ipsius E B, duplũ assumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, sit ita sub multiplex numeri assumpti G C, ut A E, est submultiplex ipsius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et uicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadẽ pars erit, uel eædem partes & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, sintque A, B C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. Dico & uicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F.

A . . . .
B . . . . G C
D . . . . . .
E . . . . . . H . . . . . . F

Quia uero B G, G C, inter se sunt æquales, & minores quã E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponitur; Erit B G, ipsius E H, eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F; ac propterea & uterque B G, G C, simul, nempe B C, secundus utriusque E H, H F, simul, nimirum E F, quarti eadem pars, uel partes, quæ B G, ipsius E H, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat. 5. uel 6. septimi.

SCHOLION.

Quod si loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit uicissim unitas

unitas tertij numeri eadē pars, quæ secundus numerus quarti; id, quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, ut ex hoc exemplo apparet.

A .
B . G . C
D . . . . . .
E . . . . . . H . . . . . . F

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et uicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quę numerus D E, numeri F, sintque A B, C, ipsis D E, F, minores, singuli singulis. Dico & uicissim, numerum A B, easdem partes esse, aut partem numeri D E, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris A B, D E, in partes A G, GB, & D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partiū in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tàm A G, quam G B, eadem pars ipsius C, quæ tam D H, quam H E. ipsius F. Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes A G, ipsius D H, & G B, ipsius H E quæ C, ipsius F: Ac propterea eadē pars erit, uel partes A G, ipsius D H, quæ G B, ipsius H E. Igitur & uterque A G, GB, simul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes utriusque D H, H E, simul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipsius D H, hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

9. septimi

5. uel 5. septimi.

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

SI fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

SIT ut totus numerus A B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, esse, ut est totus A B, ad totum C D.

A . . . . E . . . . . . B
C . . . . . . F . . . D

Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita A E, ad C F; erit per defin. 20. A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eædem partes: uel certe A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel easdem partes. Sit primum A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, æque multiplex. Quo posito erit e contrario C D, totus totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E, propter A B, A E, æque multiplices ipsorum C D, C F. Igitur & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac propterea e contrario A B, ipsius C D, & E B, ipsius F D, æque multiplex erit. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D. *7. septimi*

SIT secundo A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, eadem pars, uel eædem partes. Quo posito, erit & reliquus E B, reliqui F D, eadē pars, uel partes, quæ totus A B, toti⁹ C D; Ac proinde, per defin. 20. erit ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D. *7. uel 8. septimi.*

A . . . E . . B
C . . . . . . F . . . D

A . . . . E . . B
C . . . . . . F . . . D

CONTINEAT tertio A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, candemque insuper illius partem, uel partes. Quo posito, erit e cōtrario C D, totus totius A B, eædē partes, quæ ablatus C F, ablati A E, ut mox demōstrabimus.

Reli-

8. *septimi* Reliquus igitur F D, reliqui E B, eædem quoque partes

A . . . . . E . . . B A . . . . E . . . . B
C . . . . F . . D C . . . . . F . . . . D

erit, quæ totus C D, totius A B: Ac propterea, e contrario A B, ipsum C D, & E B, ipsum F D, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes, ut mox ostendemus. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

QVOD si A B, totus toti C D, æqualis fuerit, & ablatus A E, ablato C F; perspicuum est reliquum E B, quoque esse æqualem reliquo F D. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . E . . . B
C . . . . F . . . D

LEMMA A.

QVOD autem, si A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius uel partes; e contrario C D, ipsius A B, & C F, ipsius A E, sit eædem partes: Et si C D, ipsius A B, & C F, ipsius A E, sit eædem partes: e contrario A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter contineat, eandemque illius partem uel partes; hoc modo demonstrabimus. Contineat primo A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, nempe semel, uel bis, uel ter, &c. eandemque insuper partem, G B,

A . . N . . O . . G . . B
C . . I . . K . . D
A . . . P . . Q . . . H . . . E
C . . . L . . . M . . . F

quidem

quidem ipſius C D, *& H E, ipſius* C F, *ita ut numeri reliqui A G, A H, ſint uel æquales ipſis* C D, C F, *uel eorum æque multiplices. Diuiſis igitur numeris* C D, C F, *in partes* C I, I K, K D; *&* C L, L M, M F, *ipſis G B, H E, æquales; erit multitudo partiũ numeri C D, multitudini partium numeri C F, æqualis, quod G B, ipſius* C D, *ſit eadem pars, quæ H E, ipſius C F. Similiter diuiſis numeris A G, A H, in partes A N, N O, O G; &, A P, P Q, Q H, eiſdem G B, H E, æquales; erit quoque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis: Cum enim A G, A H, uel æquales ſint ipſis C D, C F, uel eorum æque multiplices; erunt uel tot partes in A G, A H, quot in* C D, C F; *uel certe numerus partium numeri C* D, *toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; proptereaque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars numeri* C F, *eſt numeri A E. Quare cum multitudo partiũ numeri* C D, *æqualis ſit multitudini partium numeri* C F; *erit* C D, *eædem partes numeri A B, quæ C F, ipſius A E.*

CONTINEAT *ſecundo A B, ipſum C D, & A E, ipſum* C F, *æqualiter, uidelicet ſemel, bis, ter, quaterue, &c. eaſdemque inſuper partes illius, numerus quidem* A B, *partes G B, numeri C D, & numerus A E, partes H E, numeri* C F, *ita ut reliqui nume-*

ri

ri A G, A H, ſint rurſum uel æquales ipſis C D, C F, uel eorũ æquemultiplices. Diuiſis igitur numeris G B, H E, in partes G I, I B, & H K, K E, numerorum C D, C F, erit multitudo partium ipſius G B, multitudini partium ipſius H E, æqualis.

A .. P .. Q ... G ... I .. B
C .. L ... M ... D
A ... R ... S ... H ... K ... E
C ... N ... O ... F

Simili modo, diuiſis numeris C D, C F, in partes C L, L M, M D, & C N, N O, O F, partibus G I, I B, & H K, K E, æquales, erit quoque multitudo partium ipſius C D, multitudini partium ipſius C F, æqualis, quod quælibet partium numeri G B, eadem pars ſit numeri C D, quæ unaquæque partium numeri H E, eſt numeri C F. Denique diuiſis numeris A G, A H, in partes A P, P Q, Q G, & A R, R S, S H, eiſdem partibus G I, I B, & H K, K E, æquales, erit & multitudo partium numeri A G, æqualis multitudini partium numeri A H. Cum enim A G, A H, uel æquales ſint ipſis C D, C F, uel eorum æquemultiplices; erunt uel tot partes in A G, A H, quot in C D, C F, uel certe numerus partium ipſius C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partiũ ipſius C F, in A H; proptereaq; multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partium numerorum G B, H E, erit quoque multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis; Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars

pars numeri C F, *est numeri* A E. *Quare cum multitudo partium numeri* C D, *æqualis sit multitudini partium numeri* C F; *erit* C D, *eædem partes numeri* A B, *quæ* CF, *ipsius* A E. *Quod est primo propositum.*

I A M uero sit C D, *ipsius* A B, *&* C F, *ipsius* A E, *eædem partes. Dico e contrario* A B, *ipsum* C D, *&* A E, *ipsum* C F, *æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, uel partes. Diuisis enim numeris* C D, C F, *in partes numerorum* A B, A E, *erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris* A B, A E, *in partes partibus numerorum* C D, C F, *æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri* C D, *in* A B, *supereritque eadem pars, uel partes ipsius* C D, *quoties omnes partes numeri* C F, *continentur in* A E, *& quæ pars, aut partes ipsius* C F, *supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *&* A B, A E. *Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum* A B, A E, *contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *& insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum* C D, C F, *multitudine æquales. Quam ob rem* A B, *ipsum* C D, *&* A E, *ipsum* C F, *æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes. Quod secundo est propositum.*

THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

SI sint quotcunque numeri proportionales,

nales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, ut est A, ad B. Sint enim primũ A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, eadem pars est, aut partes

A .... C .. E ...
B .... D .... F ......

A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; erit quoque
5. uel 6. septimi. uterque A, C, simul vtriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, uel E, ipsius F. Rursus quia uterque A, C, simul, tanquam unus, utriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius
5. uel 6. septimi. F; erunt & ambo A, C, tanquam unus, & E, simul, amborum B, D, tanquam unius, & F, simul eadem pars, uel partes, quæ A, ipsius B. Quare, per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ est ipsius A, ad B.

SINT secundo A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit e contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo ut prius,

5. septimi. A .... C.... E......
B. . . . D. . F . . . .

erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & e contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. Quare per defin. 20. eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quę est A, ad B. Hoc idem uerum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, uel etiam omnes, sint numerorum ad unitatem. Est enim eadem semper demonstratio, ut hic apparet,

paret, adiuuante tamen ſcholio propos. 5. huius lib.

A... C...... E......... A... C... E...... A... C... E...
B. D.. F... D. D. F.. B. D. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, uel partes; Erit per lemma præcedentis propos. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur ut prius, erunt omnes B, D, F, omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. *6. ſeptimi*

A........ C.... E............
B...... D... F.........

SINT quarto & ultimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul, quibus ſi rurſum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, ut A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum utrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A .... C ... E.....
B .... D ... F.....

THEOR. 11. PROPOS. 13. 14.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et uiciſſim proportionales erunt.

SIT A, ad B, ut C, ad D. Dico uiciſſim eſſe A, ad C, ut ut B, ad D. Nam ſint primum A, & C, minores quam B, & D; & A, quoque minor, quam C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem,

A . . .   C . . . . . .
B . . . .   D . . . .

A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, uel partes. Viciſſim ergo & A, ipſius C, &

9. vel 10. ſeptimi. B, ipſius D, eadē pars erit, uel partes: Ac proinde per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

SINT ſecundo A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, uel partes. Viciſſim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, uel partes:

A . . . . . .   C . . .
B . . . .   D . . . .

9. vel 10. ſeptimi. Atque adeo e contrario, uel A, ipſius C, & B, ipſius D, æque multiplex erit, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo poſito, erit ob eandem proportionem, uel A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex; uel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, cōtinebit æqualiter, eandemq; inſuper partem, uel partes; Atq; adeo e cōtrario erit B, ipſius A,

A . . . .   C . . . .
B . . .   D . . . . . .

& D, ipſius C, uel eadem pars, uel certe, per lemma propos.

9. uel 10. ſeptimi. 11. huius lib. eædem partes. Viciſſim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, uel partes; Ac proinde, per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A ad C, hoc eſt, erit ut A, ad C, ita B, ad D

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, uel ęque multiplex, uel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter cōtinebit, eandemque inſuper partem, uel partes; Atque adeo, e contrario,

A . . . .   C . . . .
B . . . . . .   D . . .

erit D, ipſius C, & B, ipſius A, uel eadem pars, uel certe, per

per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. Viciſſim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, uel partes; Ac propterea e contrario uel B, ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit, uel certe, per lemma adductum, B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit ut A, ad C, ita B, ad D. *9 uel 10. ſeptimi.*

SINT quinto A, & C, ipſis B, & D, æquales, & A, minor quã C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, uel eadem pars, uel eædem partes ſunt; Erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D

A . . .	C . . . .
B . . .	D . . . .

SINT ſexto A, & C, ipſis B, & D, æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorũ C, & D, uel æque multiplices ſunt, uel certe illi hos æqualiter continent, eandemque inſuper partem, uel partes; erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A	C . . .
B	D . . .

SINT ſeptimo ac ultimo A, & C, inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint quam B, & D, ſiue minores, ſiue æquales. Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, uel eadem pars, uel eædem partes; uel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, uel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, ut A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, ſi quatuor numeri proportionales ſint, & uiciſſim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

A	C . . . . .
B . . .	D . . .

SCHOLION.

COACTI ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eoſque demonſtrationibus certiſſimis confirmare, una cum lemmate propos. 11. ut earum ueri-

 tas

tas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, ut perspicue ex eorundem auctorum demonstrationibꝰ apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, ut nonnulli concedunt, quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, ubi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, uel eadem pars, uel eædem partes, &c. Nam si existimaret maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, uel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, ut manifestum est: quare reliqua omnia uerba definitionis superuacanea essent.

15. ## THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque ut A, ad B, ita D, ad E; & ut B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse ut A, ad C, ita D, ad F.

13. *septimi* Quoniam est, ut A, ad B, ita D, ad E; erit uicissim, ut A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eādem ob causam, cum sit, ut B, ad C, ita E, ad F; erit uicissim, ut B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit ut A, ad D, ita C, ad F; (Cū enim utraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni

A............	D.........
B........	E......
C....	F...
G................	H............

portioni B, ad F, ut demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt, ut mox ostendetur.) Ac proinde uicissim, ut A, ad C, ita D, ad F. 13. septim.

QVOD si fuerint plures numeri, quàm tres, ita ut sit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autẽ ut C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit ut A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

IDEM *uerum est, si loco unius numeri unitas assumatur, uel etiam loco plurium plures unitates, ut in hoc exemplo perspicuum est.*

A	D ......
B ..	E ......
C ...	F ....
G .	H ...

LEMMA.

QVOD *autem duæ proportiones numerorũ, quæ eidem proportioni eædem sunt, inter se quoque sint*

A	*B*	*C* ....
D	*E*	*F* ...

eædem, quales sunt in demonstratione proportiones A, *ad D, & C, ad F, quæ eædem ostensæ sunt proportioni B, ad E; ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam* A, *ipsius D, quam C, ipsius F, æque multiplex, uel eadem pars, uel*

 eædem

eædem partes; uel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D; quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. numeri A, D, C, F, proportionales ſunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum.

HOC idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

16. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI unitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterũ quédam numerum metiatur: Et uiciſſim æque unitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR unitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æque. Dico uiciſſim unitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æque metiri. Diuiſo enim numero B C, in unitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo unitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æque unitas A, numerum D, & unitas B G, ipſum E I, atque unitas G H, ipſum I K, & unitas H C, ipſum K F: atque idcirco eadem pars erit unitas A, numeri D, & unitas B G, numeri E I, quæ unitas G H, numeri I K, & unitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt unitates B G, G H, ſimul numerorum E I, I K, ſimul, quæ unitas B G, numeri E I, uel unitas H C, numeri K F. Itaque quia eadẽ pars eſt unitas H C, numeri K F. quæ numerus B H, numeri E K; erit, ut ibidẽ demõſtrauimus, unitas H C, & numerus B H, ſimul, utriuſque

A. D..
B.G.H.C E..I..K..F

que

que numeri K F, E K, simul, eadem pars, quæ unitas H C, numeri K F, hoc est, quæ unitas A, numeri D; Ac proinde unitas A, numerum D, & numerus B C, ex unitate H C, & numero B H, compositus, numerum E F, ex numeris K F, E K, compositum æque metietur. Si unitas igitur numerũ quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ILLVD idem, quod Euclides demonstrauit de numeris, propos. 13. ostendit hoc in loco separatim de unitate, & tribus numeris, propterea quod unitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia unitas A, numerum B C, æque metitur, atque numerus D, numerum E F; erit unitas A, eadẽ pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit vicissim unitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri mutuo se se multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita ut A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim unitate E; cũ A,

E .
A . . .   B . . .
D . . . .   C . . . .

ipsum B, multiplicans faciat C; erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, unitates; atque adeo unitas E, numerũ A, & numerus B, numerum C, æque metietur. Vicissim ergo & unitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, 15. defin. 15. septimi

 metietur

metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, unitates, atque adeo unitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autẽ & eadem unitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Aeque igitur numerus A, utrunque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo se se multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

```
        E .
A . . .             B . . . .
D . . . . . . . . . . . .   C . . . . . . . . . . . .
```

SCHOLION.

Potest hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

Si duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur unus idemque numerus.

Multiplicet enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam ut prius, cũ A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus unitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At uero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, etiam unitas E, numerum B, & numerus A, numerũ factum, per defin. 15. æque metitur. Idẽ ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quando quidem ipsum numerus A, æque metitur; atque unitas E, ipsum B.

```
    E .
A . . .    B . . . .
C . . . . . . . . . . . .
```

18. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans, fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem

tionem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, ut B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim unitate F; erit D, ex B, cōpositus toties, quoties unitas F, est in A, per defin. 15. similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem unitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; Ac proinde, per defin. 20. erit ut B, ad D, ita C, ad E; et permutando, ut B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat. 13. septimi

F .
A . . . .
B . . C . . . .
D . . . . . . E . . . .

THEOR: 16. PROPOS: 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiā multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI. A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse ut A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cū ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicās ipsos A, & B, facit D, & E; erit, ut A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum. 16. septimi 17. septimi

A . . . . B . . . . .
C . . .
D . . . . E . . . .

SCHO-

SCHOLION.

Hanc propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, uel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, uel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, uel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quos numeri multiplicantes, uel multiplicati B, C, D: hoc est, esse, ut B, ad C, ita

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E . . . . . . F . . . . G . . . .

E, ad F; & ut C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, uel ex B, C, in A, fiant E, F; erit ut B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, uel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque ut C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

17. uel 18. septimi.

20.1

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D, ut quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quar-

D quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, hoc est, ut A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam uidelicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus.

17. septimi

18. septimi

A . . .
B . .
C . . . . . .
D . . . .
E . . . .
F . . . .
G . . . .

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartũ genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, ut quidẽ A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, ita G, ad E, uel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, ut ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut A, ad B, ita idẽ G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, ut A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

17. septimi

18. septimi

SCHOLION.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum.

SI duo numeri duos numeros eandem, quá illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente,

dente, in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

20. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidẽ A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, erit numerus factus ex A, in C,

A. . . . .
B. . . . . .   D. . . . . .
C . . . .

19. *septimi* æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur.

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, ut B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D,

19. *septimi* tertium; erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, ut quidem A, ad B, ita D, ad C, uel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor uero minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadẽ, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita ut sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem A B; ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita E, ad F; erit uicissim, ut A B, ad E, ita C D, ad F; Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E F; erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, uel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. Erit ergo, ut A G, ad E, ita C H, ad F; & uicissim, ut A G, ad C H, ita E, ad F, uel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsum E, & C D, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandẽ cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . .
F . . . . . .

13. septimi

20. defin.

SCHOLION.

PARI *ratione, & hoc uerum est, quod Campanus docet.*

QVOT-

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem si

A.'. K... B   C.. L. D   E.... M.... F
G...........   H......   I.............

proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, siue non; ita ut non possint reperiri alij numeri ipsis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad secundum sit, ut A B, ad C D; & secundus ad tertium, ut C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. uel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio uero 20. ad 25. in 4. & 5, uel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, ut A B, ad C D; & H, ad I, ut C D, ad E F. Dico A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, metiri æque. Cum enim sit ut A B, ad
13. septimi *C D, ita G, ad H; erit uicissim ut A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cum sit ut C D, ad E F, ita H, ad I, erit quoque uicissim, ut C D, ad H, ita E F, ad I. Quare A B, ipsius*
20. defin *G, & C D, ipsius H, & E F, ipsius I, erit uel eadem pars, uel eædem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F; atque adeo A K, ipsius G, &*
20. defin. *C L, ipsius H, eadem pars. Erit ergo ut A K, ad G, ita C L,*

C L, ad H; & uicissim ut A K, ad C L, ita G, ad H, uel A B, ad C D. Eodemque modo erit, ut C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quam A B, C D, E F. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eædem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, æque metietur. Quod est propositum. 13. septimi

Q V O D si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita ut etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æque metiri. Nã per hãc propos. 21. A, B, cũ sint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipsos D, E; eademq; ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, æque metiatur, ac B, ipsum E; metientur æque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

A ..	B	C ...
D	E	F ......

THEOR. 20. PROPOS. 22. 19.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

S I N T tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadẽ ratione, sitque perturbata eorũ ꝓportio, ut quidẽ A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse

A	H ...
B ...	D ....
C	E ....
G	F ..

ut A, ad C, ita D, ad F. Cum enim sit ut A, ad B, ita E, ad
19. *septimi* F; erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam ut B, ad C, ita D, ad E, erit eidē numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atq; adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. Quare erit
19. *septimi* ut A, ad C, ita D, ad F.

A............	H...
B...	D....
C......	E........
G........	F..

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam C, ad G, ut H, ad D; Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem, ut C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idē ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

QVONIAM Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13 & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos in numeris, & alia quædam ostendere, octo sequentibus theorematibus.

I. SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo proportionales erunt.

SIT

Sit, ut A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse ut B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit C, ad D, ut A, ad B erit uicissim C, ad A, 13. *septimi*
ut D, ad B. Rursus quia est D, ad B, ut C, ad A, erit uicissim D, ad C, ut B, ad A, hoc est, ut B, ad A, ita D, ad C; Quod est propositum.

A ...... C ...
B .... D ..

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt. II.

Sit ut A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico & diuidendo esse, ut A C, ad C B, ita D F, ad F E. Cum enim sit ut A B, ad C B, ita D E, ad F E, erit uicissim, ut totus A B, ad totum D E, 13. *septimi*
ita ablatus C B, ad ablatum F E: Ac proinde, ut totus A B, ad totum D F, ita reliquus A C, ad reliquum D F: hoc est, A C, ad 11. *septimi*
D F, ut C B, ad F E. Vicissim ergo erit quoque A C, ad C B, ut 13 *septimi*
D F, ad F E. Quod est propositum.

A .... C .... B
D .... F .. E

Si diuisi numeri proportionales sint; Hi quoque compositi proportionales erunt. III.

Sit ut A B, ad B C, ita D E ad E F. Dico & componendo, esse ut A C, ad B C, ita D F, ad E F. Cum enim sit, ut A B, ad B C, ita DE, ad E F, erit uicissim, ut A B, ad D E, ita B C, ad 13. *septimi*
E F; Ac proinde A B, B C simul ad D E, E F, simul, ut B C, ad 12. *septimi*
E F: Et uicissim A B, BC, simul, hoc est, totus A C, ad B C, ut 13. *septimi*
DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositũ.

A .... B ... C
D .... E .. F

Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. IIII.

Sit ut AB, ad CB, ita D E, ad F E. Dico, per conuer-

 sionem

ſionem rationis eſſe quoque, ut A B, *ad* A C, *ita* D E, *ad* D F. *Cum enim ſit, ut* AB, *ad* C B, *ita* DE, *ad* F E, *erit uiciſſim, ut totus* A B, *ad totum* DE, *ita ablatus* CB, *ad ablatum* F E; *Ac proinde, ut totus* A B, *ad totum* DE, *ita erit reliquus* A C, *ad reliquum* DF.

13. *ſeptimi*

A . . . . . . C . . . B

11. *ſeptimi* D . . . . F . . E

13. *ſeptimi* *Viciſſim igitur, ut* A B, *ad* A C, *ita* D E, *ad* D F. *Quod eſt propoſitum.*

II *Rvrsvs ex his facilè demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 24. lib. 5. Videlicet.*

V. Si primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eădem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.

III *Sit* [illegible] AB, *primus ad* C, *ſecundum, ita* DE, *tertius ad* F, *quartum: Item vt* BG, *quintus ad* C, *ſecundum, ita* EH, *ſextus ad* F, *quartum. Dico ita eſſe* AG, *compoſitum ex primo & quinto, ad* C, *ſecundum, ut eſt* D H, *compoſitus ex tertio & ſexto, ad* F, *quartum. Cũ enim ſit, ut* B G, *ad* C, *ita* E H, *ad*

A . . . . . . B . . G D . . . . E . . . H

C . . . . F . . . . . .

F; *erit conuertendo ut* C, *ad* BG, *ita* F, *ad* EH. *Quoniam igitur eſt ut* A B, *ad* C, *ita* D E, *ad* F; *& ut* C, *ad* B G, *ita* F, *ad* E H; *erit ex æqualitate, ut* AB, *ad* BG, *ita* DE, *ad* EH. *Componendo igitur, ut* A G, *ad* B G, *ita* D H, *ad* EH. *Itaque cum rurſus ſit, ut* A G, *ad* BG, *ita* DH, *ad* E H: *& ut* BG, *ad* C, *ita* EH, *ad* F; *erit ex æqualitate, ut* AG, *ad* C, *ita* DH *ad* F. *Quod eſt propoſitum.*

Eodem *modo & hoc Theorema oſtendemus.*

VI. Si duo numeri ad duos numeros eandem *habeant*

habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

Sit ut totus A B, ad C, ita totus D E, ad F; Item ut detractus A G, ad C, ita detractus D H, ad F. Dico & reliquum G B, esse ad C, ut est reliquus H E, ad F. Cum enim sit, ut A G, ad C, ita D H, ad F; erit conuertendo, ut C, ad A G, ita F, ad D H.

A . . . . . G . . B D . . . . H . . . E
C . . . . F . . . . . .

Quia igitur est, ut A B, ad C, ita D E, ad F; & ut C, ad A G, ita F, ad D H; erit ex æqualitate ut A B, ad A G, ita D E, ad D H. Diuidendo ergo ut G B, ad A G, ita H E, ad D H. Itaque cum rursus sit, ut G B, ad A G, ita H E, ad D H; & ut A G, ad C, ita D H, ad F; erit ex æqualitate, ut G B, ad C, ita H E, ad F. Quod est propositum.

Item & hoc demonstrabimus.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. VII.

Sit ut primus A, ad secundum B C, ita tertius D, ad quartum E F; & ut primus A, ad quintum C G, ita tertius D, ad sextum F H. Dico ita esse A, primum ad B G, compositum ex secundo & quinto, ut est D, tertius ad E H, compositum ex quarto & sexto.

A . . . . . . D . . . .
B . . . . C . . G E . . . . . . F . . . . H

Cum enim sit, ut A, ad B C, ita D, ad E F; erit conuertendo ut B C, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur est ut B C, ad A, ita E F, ad D; & ut A, ad C G, ita D, ad F H; erit ex æqualitate ut B C, ad C G, ita E F, ad F H; & componendo, ut B G, ad C G, ita E H,

 ad

ad F H; & conuertendo, ut C G, *ad* BG, *ita* FH, *ad* E H. *Quoniam ergo est, ut* A, *ad* C G, *ita* D, *ad* F H; *& ut* CG, *ad* B G, *ita* FH, *ad* EH; *erit ex æqualitate, ut* A, *ad* BG, *ita* D, *ad* E H. *Quod est propositum.*

DENIQVE *ex his omnibus inferemus hoc theorema.*

VIII. SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportioné, quam omnes hi simul ad eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idé numerus ad omnes illos simul proportionem, quã idem numerus ad hos omnes simul.

HABEANT *quotcunque numeri* A B, BC, CD, *ad eundem* E, *proportiones, quas totidem* F G, G H, H I, *habent ad eundem K: Hoc est, sit ut* A B, *ad* E, *ita* FG, *ad* K; *& ut* B C,

A . . B . . . . . C . . . . D   F . . G . . . H I
E . . . .   K . . . . .

ad E, *ita* G H, *ad* K; *& ut* CD, *ad E, ita* H I, *ad* K. *Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum* A D, *ad* E, *eandem habere proportionem, quam hi omnes simul, hoc est, ipse* F I, *ad* K. *Cum enim sit, ut* AB, *primus ad* E, *secundum, ita* FG, *tertius ad* K, *quartum: Item ut* B C, *quintus ad* E, *secundum, ita* G H, *sextus ad* K, *quartum; erit quoque ut* A C, *primus cum quinto, ad* E, *secundum, ita* F H, *tertius cum sexto, ad* K, *quartum. Rursus quia est, ut* A C, *primus ad* E, *secundum, ita* F H, *tertius ad* K, *quartum: Item ut* C D, *quintus ad* E, *secundum, ita* H I, *sextus ad* K, *quartum; erit etiam, ut* A D, *primus cum quinto, ad* E, *secundum, ita* F I, *tertius cum sexto, ad* K, *quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.*

SED *habeat iam idem numerus* E, *ad numeros quotcunque* A B, *A B*, B C,C D, *proportiones eaſdem, quas idem numerus K, ad tctidem* F G, G H, *H I*; *Hoc eſt, ſit ut* E, *ad* A B, *ita K*; *ad* F G; *& ut E, ad* B C, *ita* K, *ad* G H; *& ut* E, *ad* CD, *ita K, ad H I. Dico eſſe, ut E, ad omnes illos ſimul, nempe ad* A D, *ita* K, *ad hos omnes ſimul, utpote ad F I. Cum enim ſit, ut E, primus ad* A B, *ſecundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item ut E, primus ad* BC, *quintum, ita K, tertius ad G H, ſextum; erit quoque, ut E, primus ad* A C, *ſecundum cum quinto, ita* K, *tertius ad F H, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, ut E, primus ad* A C, *ſecundum, ita* K, *tertius ad F H, quartum: Item ut E, primus ad* C D, *quintum, ita* K, *tertius ad* H I, *ſextum; erit etiam, ut* E, *primus ad* A D, *ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad* F I, *quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.*

THEOR. 21. PROPOS. 23. 23.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. ſint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minores ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æque; atque adeo ſecundum eundem numerum, qui ſit E, ita ut C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties unitas eſt in E. Itaq; cũ unitas numerũ E, & numerus C, numerũ A, æque metiatur; metietur & uiciſſim æque unitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia unitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; metietur quoque uiciſſim æque unitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem nu-

A .... B ....
C ------ D ---
E ---

21. ſeptimi
15. ſeptimi

 merus

merus E, utrunque A, & B, metiatur, erit numerus F, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerũ, præter unitatem, cõmuni mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habeant numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties unitas est in numero D; At uero ipsum B, toties, quoties unitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt unitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt unitates in E, producit ipsum B; fit, ut D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D ad E; Atque adeo, cũ D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

A........ B.....
C----
D---- E----

9. pron.
18. septimi

SCHO-

SCHOLION.

HANC *propositionem, & praecedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.*

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT *quotcunque numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarũ proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim nõ sunt minimi, erunt aliqui alij minores*

A...... B........ C....
D---- E---- F---
G----

ipsis, nempe D, E, F, *minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur* D, E, F, *minimi, sunt in proportione numerorum* A, B, C; *metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, aeque; per ea, quae ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus; atque adeo secundũ unum eundem numerũ, qui sit* G; *ita ut* D, *toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties unitas est in G. Quoniam igitur unitas numerum G, & numerus D, ipsum A, aeque metitur; metietur quoque uicissim aeque unitas numerum D, & numerus G, nu-* 15. *septimi*
merum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, aeque atque unitas ipsos E, F; Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; sed ipsi A, B, C, minimi sunt.

IAM *uero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G, ita* *vt G, toties metiatur ipsum A, quoties unitas est in D; & ipsum B, toties, quoties unitas est in E; & ipsum C, toties quoties vnitas est in F. Quoniā igitur G, toties compositus facit numeros* A, B, C, *quoties vnitas est in* D,

A......   B........   C.....
D ---   E ------   F ---
G ----

9. *pron.* *E, F; fit ut D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.*

24. ## THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B; & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim nō sunt inter se primi B, & C; metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipsum A; metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem, numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demōstrandum.

A........   B.....
11. *pron.* C....   D ---

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 26. 25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

Sit uterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, uel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi, ſit eorum communis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties, quot unitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt unitates in F; ſit

A....... B...
C........
D.....................
E---- F-----

ut F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autẽ idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartũ fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; erit ut E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartũ. Quia uero A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri, erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum ſint inter ſe primi, in ſua proportione minimi erunt. Aeque igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cum E, metiatur utrunque B, & C; nõ erũt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

9. pron. *16. ſeptimi* *19. ſeptimi* *25. ſeptimi* *23. ſeptimi* *21. ſeptimi*

THEOR. 25. PROPOS. 27. 26.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, erit numerus ex A, in D,

26. septimi hoc est, ex A, in se genitus, nempe C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.......

C................

D....

27. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrunque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT uterque A, & B, ad utrunque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim uterque A, & B, primus sit ad C; erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum uterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus est ad E; erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat ostendendum

A..... B...

E...............

26. septimi C... D..

F........

26 septimi.

28. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erūt:

Et

Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursũ fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoq; esse inter se primos.

A . . .	B . .
C.	D. . . .
E	F. . . . . . .
G, 81.	H, 16.

Cum enim A, B, sint inter se primi, erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus. 27 *septimi*

RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, erit & C, factus ex A, in se, ad B, & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: 27. *septimi* Erat autem & C, ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrunque B, D, primus erit; Ac proinde E, factus ex A, in 28. *septimi* C primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi sint ad B, erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque 26. *septimi* ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur uterque A, E, ad utrunque B, F, primus est; erit & G, factus ex A, in E, 28. *septimi* ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus; necnon & H, ad A; Quare 26. *septimi* & genitus ex A, in G, ad genitum ex B, in H, primus erit: 28. *septimi* cum uterque A, G, ad utrunque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam

Etiam uterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si uterque simul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & utrunque simul A C, primũ esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, AB, non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur

A . . . . B C

D ----

12. pron. D, metitur totum A C, & ablatum A B, metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemq; modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.

SED iam uterque A B, B C, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, uidelicet ad A B. Dico & AB, BC, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, &

10. pron. B C; metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, cõpositum; Ac proinde A C, AB, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur AB, BC, inter se primi. Eodemq; argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad BC, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unũ illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, BC, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiusdem. quod est propositum.

32. THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem

nem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos, præter unitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerũ A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerũ, &c. Quod demonstrandum erat.

A..... B........

C-----

THEOR. 30. PROPOS. 32. 33.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiã unum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem unum ipsorum A, & B, si non utrunque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur uero ipsum C, toties, quot sũt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; erit ut D, primus ad A, secundũ, ita B, tertius ad E, quartũ. *19. septimi* Quia uero prim⁹ D, ad A, primus est, *31. septimi* cum eum non metiatur; erunt D, & A, in sua proportione *23. septimi* minimi. Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, *21. septimi* ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum

A.... B......

C..........................

D.... E.........

ſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquē, &c Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Eodem modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

Si duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipſum ſit compoſitus: is ad unum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

Nam ex A, in B, fiat C, quem uel metiatur numerus non primus D, uel certe compoſitus ad eum ſit. Dico D, quoque ad unum ipſorum A, B, compoſitū eſſe. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterque A, & B, ad D, primus. Quare & C, ex illis genitus, ad eundem 26. ſeptimi *D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur uel metiri ipſum C, vel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad utrunque.*

A . . . B . . . .
C . . . .
D . . . .

30. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Sit numerus compoſitus A. Dico aliquem numerū primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si uero compoſitus, metiatur eum numerus C, qui uel primus erit, uel compoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſi- 11. pron. tus

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia uero numerus non diminuitur infinite, ueniemus tandem ad aliquẽ numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, metietur quoque compositum A. Omnem ergo compositum numerum, aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum. 11. pron.

A ....
B .... C ...

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, uel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. 11. pron.

A ....
B ... C --

THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum uel esse primũ, uel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus uel primus sit, uel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si vero compositus; metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum. 33. septimi

A ....

PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem ratio-

nem

nem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habẽtes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C. ſiue non; oporteatque totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti. Si primi inter ſe ſunt; erũt ipſi in continuatione ſuarum proportionũ minimi, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib.

A....... B.... C........
D . .
E ... F . G ....
H --- I --- K ---
L -----

demonſtrauimus. Si uero non ſunt inter ſe primi, inuenta
3. ſeptim. ſit maxima earum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos eſſe in proportionibus numerorũ A, B, C. Quod enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per
9. pron. E, F, G; fit, ut D, ipſos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

QVOD uero E, F, G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A, B, C, metiuntur æque, ut ad propos. 21. huius lib. oſtendimus; metiantur eos per nume-
9. pron. rum L. Quo poſito L, multiplicans numeros H, I, K, pro-
8. pron. ducet numeros A, B, C; & uiciſſim L, ipſos A, B, C, metietur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, ſecundus multiplicans L, tertiũ
19. ſeptimi facit eundem A; erit, ut E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quam H: Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipſos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima menſura communis numerorum A, B, C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E, F, G, minimi in continuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C,

ſed

sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C. Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLION.

Ex his facili uia comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D, E, siue illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, siue non, reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F & G, minimos in proportione duorum A, & B, nempe illos, per quos I, maxima eorum cõmunis mensura eos metitur.

A, 16.	B, 24.	C, 36.	D, 14.	E, 81.
I, 8.				
F, 2.	G, 3.			

CAETERVM aliquando contingit unum numerorum E, F, G, inuentorum esse unitatem, quando scilicet D, maxima mensura uni ipsorum A, B, C, æqualis est, ut ex his exemplis

A ... B ..... C .... A .... B .. C ......
D ... D ..
E . F ... G ... E .. F . G ...

apparet. Manifestum est autem, inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire,

quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, sesèque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse minimum, quē A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perspicuum est. Nam cum producatur C, ex A, in B, uel ex B, in A; metietur A, ipsum C, per

7. pron. B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omniū, quos A, & B, metiuntur, sic demonstrabimus. Si C, non

A . . . .   B . . . . .
C . . . .
D ------------------
E ------   F ----

est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturque A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, tam ex A, in E, quam

9. pron. ex B, in F, & e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex

19. septimi B, secundo in F, tertium; erit, ut A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur

23. septimi primi inter se, & ob id, in sua proportione minimi sint) æque

21. septimi metientur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam uero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; erit

17. septimi C, ad D, ut B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipsum E, ut ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipso C; atque adeo C, minimus est omnium, quos metiuntur.

SINT secundo dati numeri A, & B, non primi inter

35. septimi se. Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, ut sint quatuor numeri proportionales, nempe A, ad B, ut C, ad D. Quo posito, fiet idem

19. septimi numerus, ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. factus ergo sit E. Dico E, hac uia procreatū esse

A . . . .   B . . . . . .
C . .   D . . .
E . . . .
F ---------------
G -----   H ----

7. pron. minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur

tiantur, manifestum est. Nam cum tã A, multiplicatus a D, quam B, multiplicatus a C, ipsum E, producat; metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod uero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; erit, ut A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, uel H, ad G, metientur ipsos H, & G, æque; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia uero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; erit E, ad F, ut D, ad G; Ac propterea: cũ D, metiatur ipsum G, ut ostensum est; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdũ. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

7. pron.

9. pron.

19. septimi

17. septimi

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem ratio nem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiantur,

SCHOLION.

HOC *autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.*

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiã me-

 tiantur:

tiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D, sitque alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum C D, metiri. Si enim E, ipsum C D, non metitur; ablato E, ex C D, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E.

A . . . . B . . . .
C . . . . F —— D
E . . . .

Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties potest, numerum, si fieri potest, F D, minorem se, ita ut E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur; & E, ipsum C F; metietur quo-
11. *pron.* que tam A, quam B, ipsum C F. Itaque A, & B, cum me-
12. *pron.* tiantur totum C D, & ablatum C F; metientur & reliquum F D. Est autem F D, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim; Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quē illi minimum metiantur, numerum.

36. *septimi* SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primo C, ipsum D, ita ut omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiantur, minimum quoque esse, quē tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, me-

A . . . B . . . . C . . . .
D . . . .
E ————

tiantur,

tiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E, & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. *37. septimi*

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cum A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundẽ E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. *36. septimi* *11. pron.*

A.. B... C....
D......
E............
F --------

Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest. A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiantur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdũ. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum. *37. septimi* *37. septimi*

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nã in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLION.

Hoc corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sitque F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partẽ

A.. B... C....
D..........................G—--E
F............

D G, relinquatque numerum G E, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum D G; metientur
11. pron. *quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cum & totum DE,*
12. pron. *ponantur metiri; metientur & reliquum G E, ipso F, minorẽ. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiantur. Quod est absurdũ, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum DE.*

Pari ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur: Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

Metiatur numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquã a B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot unitates sunt in numero C. Quia igitur unitas ipsum C, & B, ipsum A, æque me-

A............
B....   C...

15. septimi titur; & uicissim unitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur; atque adeo eadem pars erit unitas ipsius B, quæ C, ipsius A: Est autem unitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, ut ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars

erit

erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendũ erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nã cũ B, pars denominetur a C; ſit autẽ & unitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata; metietur unitas ipſum C, & B, ipſum A, æque. Viciſſim ergo & unitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandũ erat. *15. ſeptimi*

A ....

B ... C .....

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, hoc eſt, qui ipſas denominent, D, E, F; minimusque, quem D, E, F, metiantur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cũ D, E, F, ipſum G, metiantur, habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod uero G, ſit minimus illas partes habens, per ſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt, H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C; metientur ipſum numeri D, E, F, a parti- *38. ſeptimi* *39. ſeptimi* *40. ſeptimi*

D .. A. Secunda

E ... B. Tertia

F .... C. Quarta

G ....

H ----------

bus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Qvod si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet a D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur æque unitas ipsos I, K, L, & numeri D,

A. Secunda	*D . .*	*I . . . . .*	
B. Tertia	*E . . .*	*K . . . . .*	
C. Quarta	*F . . . .*	*L . . . . . .*	
	G		

15. *septimi* *E, F, ipsum G. Vicissim ergo metietur quoque æque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G; atque adeo unitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo unitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ a D, E, F.*

Ex his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes a numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

Iam vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; sit illius duplus, numerus H, triplus uero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimũ, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim

H, &

H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet a D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ip-

G. . . . . A D . .
H. . . . . B E . . .
I. . . . . C F . . . .
K ------------- M ------ L
N ---------------------------------- P ---- O

sum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C. 11. pron. 39. septimi

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus dictas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus dictis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundē K L. Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem: Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est, huiusmodi partes habens. 40. septimi 12. pron.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, nempe N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autē H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C; metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Ac idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem. Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, ter- 40. septimi 12. pron.

I, tertius est illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM repetire, qui minimus cũ sit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendusque sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cũ ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties unitas in D: Est autẽ vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . .
H . . . .
. Vnitas
I ————————
K ——————
L ————
M ——

adeo H, habet partem A, nempe numerum G, a D, denominatã. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nempe numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nempe unitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus dictas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, a D, denominata; erit K, toties in I, *quoties vnitas in D; Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M, Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I; erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, ut G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & ut G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit, per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autẽ H, numerus numero I, maior; vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quã H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.* 15. defin. 17. septimi

H.	G.	F.	Vnitas.
I.	K.	L.	M.

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda, ac demonstratio: Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hæc partem a 3. denominatam; & hæc aliam a 4. & hæc aliam a 5. & hæc denique partem a 6. denominatam, vt manifestum est.

Qvod si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, nempe secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS
ELEMENTVM VIII.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi uero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis ratione habentiũ.

NVMERORVM deinceps proportionaliũ quotcunque A, B, C, D. extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentiũ. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunq; numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, q bini sumuntur, & in eadẽ ratione; erit, ex æ-

A........	E ---
B............	F----
C.................	G ------
D.........................	H ----------

14. *septimi* qualitate, ut A, ad D, ita E, ad H: Sunt autem A, & D, in
23. *septimi* sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur.
21. *septimi* Igitur A, ipsum E, & D, ipsum H, æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri dein-

ri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandũ.

SCHOLION.

PERSPICVVM *autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continuè proportionales, ut vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in priori eadem semper proportio reperitur.*

A....	E---
B......	F----
C........	G-----
D..........	H--------

PROBL. 1. PROPOS. 2. — 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B; hoc est, esse ut C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiãt C, & D; erit ut A, ad B, ita C, ad D. 17. septimi

A.. B...

C.... D...... E.........

F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.

K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; erit quoque, ut A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod uero in eadẽ ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi

mi C,& E,procreati sunt ex A,& B, in se ipsos; sunt autem
24. *septimi* A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione;
29. *septimi* Erunt & C, E, extremi, inter se primi. Quare C, D,
1. *octaui.* E,minimi sunt in ratione A, ad B.

IAM uero ex A,in tres inuentos C, D, E, fiant F, G,H, & ex B, in ultimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F,G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt ex ijs,quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus,numeri F,G, H, easdem proportiones, quas C,D, E,hoc est,quam habet A,ad B.

A.. B...
C.... D...... E.........
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36 N, 54. O, 81.

Rursus quia A, & B, ipsum
18. *septimi* E,multiplicantes,fecerunt H, & I; erit quoque, ut A, ad B, ita H,ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A,ad B. Quod autem in data ratione minimi sint,ita perspicuum fiet. Quoniam A, & B, mini-
24. *septimi* mi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I ex A, B, in C, E; nempe F, ex A, in C, & I,ex B, in E; erunt
29. *septimi* & F, I,extremi, inter se primi. Quare F, G, H, I, in sua
1. *octaui.* proportione,quæ est A, ad B, minimi sunt.

NON aliter,si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O; erunt K, L, M,N,O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos,&c. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

EODEM *modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B,in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G,ex B, in E, D,*
18. *septimi* *C: & F, ex A, in C. Quo peracto,numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A, B, multiplicantes C, ipsos*

ſos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos.18. huius lib. demonſtrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A, B; quod B, multiplicans C, D, E, ipſos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi ſint, oſtendetur, vt prius.

NON aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Itaque ſiue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in I, H, G, & ex A, in C.

COROLLARIVM. I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint continue proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea uterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuētorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROL-

COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, uel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, uel ex B, in F, G, H; ut ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLION.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab vnitate, quod illorũ quidẽ proportiones a numero A, horũ vero a B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo uides C, & E, extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, nempe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi constituuntur. Nam vltimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi

minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque in reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant. Sumantur tot numeri continue ab unitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erũt quinque numeri ab unitate quincupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet; 625. 750 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exẽplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionẽ sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, ut ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, ut primus ad secundum, vt propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

THEOR. 2. PROPOS. 3. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cũ eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur

niantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, uel B, ad C, uel C, ad D. Deinde iuxta uiam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F. 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18, N, 27.

Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi: Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

HAEC propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & uerbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inueniri non possent, ex præcedenti problemate K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunq; continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, ut constat ex 1. theor. Et uicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ut

ex

ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper e cõtrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, ut manifestum est in exemplo nuper adducto 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. 4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, se- *36. septimi*
cundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metian-

A, 6.	B, 5.	C, 4.	D, 3.
H, 4.	F, 24.	E, 20.	G, 15.
I ----	K ----	L ----	

tur per H. Quo posito, A, & B, multiplicantes ipsum H, *9. pron.*
producent F, & E. Quare erit ut A, ad B, ita F, ad E. Ea- *18. septimi*
dem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G, erit ut C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, mini-
mi sunt in sua proportione, ipsi æque metientur I, & K, in *21. septimi*
eadem proportione existentes, nempe B, ipsum K; consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens ante-

cedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur, me-
37. septimi tietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, me
tiuntur; minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur
erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad
B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in
datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A,
ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor mi-
nimi deinceps proportionales in datis rationibus. Inuento
36. septimi rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus,
& C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur
A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, me
tiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non.
Metiatur primũ; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico

A, 6.	B, 5.	C, 4	D, 3.	E, 5.	F, 7.
H, 24.	G, 20.	I, 15.	K, 21.		
L ----	M ----	N ----	O ----		

H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim
sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat.
Cum enim A, & B. ipsos H, & G, æque metiantur; erit ut
prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ra
tione erit, ut C, ad D, ita G, ad I: & ut E, ad F, ita I, ad K;
quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, &
K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportio-
nales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi,
sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationi
bus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest L, M, N, O.
Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; ipsi
21. septimi. metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nem-
pe B, consequens consequentem M. Eodem modo C, &
D, æque metientur M, & N; nimirum C, antecedens an-
tecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metian-
37. septimi tur; metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem
B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdũ.
Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in ra-
tionibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G,
I, K, in datis rationibus minimi sunt.

SED iam E, non metiatur ipsum I. Inuento ergo nu-
mero

mero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum 36. septimi
K, metitur, toties quoque G, ipsum L, & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cum enim

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O ---- P ---- Q ---- R ----

H, G, I, ipsos M, L, K, æque metiantur; erit ut supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & ut G, ad I, ita L, ad K; Est autem eadem ratione, ut H, ad G, ita A, ad B; & ut G, ad I, ita C, ad D; quod & A, B, ipsos H, G; & C, D, ipsos G, I, metiantur æque. Igitur ut A, ad B, ita M, ad L; & ut C, ad D, ita L, ad K. Atqui ut E, ad F, ita quoque est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur: Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si nãque non sunt minimi; dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt, ipsi æque metientur O, P, 21. septimi
in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, uidelicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, metietur quoque G, mini- 37. septimi
mus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia uero ostensum est, esse ut G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, ut G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, metiente G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q, (quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nempe antecedens E, 21. septimi
antecedentem Q.) Ergo metientibus I, E, ipsum Q; metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem 37. septimi
Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; proptereaque ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, ut nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primũ M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F: Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si uero S, ipsum N, non metiatur; sumemus

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,3. T,2.
M,48. L,50. K,30. N.105. O,70.

36. septimi O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiat K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R;

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105.
R,144. Q,120. P,90. O,315. V,70.

quoties uero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demõstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, uel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nõ minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestũ est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus

libus in datis rationibus, si iꝫ multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris uero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; uel ex proportionibus C, ad F; & D, ad E, ita ut latera unius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E; fecit A, & G; erit A, ad G, ut C, ad E. 17. septimi Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, ut D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. 27. defin. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24.		B, 48.	
	G, 48.		
C, 4.	D, 6.	E, 3.	F, 16.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, cōpositā esse ex pportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; erit A, ad G, ut C, ad F. 17. septimi Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, ut D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex pro-

A, 24.		B, 48.	
	G, 96.		
C, 4.	D, 6.	F, 16.	E, 3.

 portioni-

27. *defin.* portionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquã illorũ ullum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, uero ipsum B, non metiatur;

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
F,4. G,6. H,9.

neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod uero nec alius quisquam illorum ullum metiatur, sic demonstrabimus. Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, ut A, ad C, ita F, ad H. Quia uero est ut A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non non erit unitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum unitas omnem numerum metiatur. Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit unitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, ut F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demõstrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

Margin notes: 2. *octaui.* (beside "tiatur, sic demonstrabimus"); 3. *octaui.* (beside "F, & H, sint inter se primi")

SCHO-

SCHOLION.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam ullius multiplex erit.

Sint enim continuæ proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum ullius eſſe multiplicem. Quod enim nullus proxime inſequẽtis multiplex ſit, conſtat. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16. *Nam cum ſit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neque D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quiſquam illorum ullius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur e contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, ut C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, ut D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundum D, non metitur; neque alius quiſquam illorum ullum metietur. Quare e contrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum ullius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. docuimus.* 6. octaui

Sed & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus uero ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

11. pron. *Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D; metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur; metietur quoque*
11. pron. *B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.*

SED iam primus A, multiplex sit B; secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex; erit & B, ipsius C; & C, ipsius D; & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex; metietur e contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea e contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, uel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel

A, vel alius quisque nullum a secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentiũ. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam ullum a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius a secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secũdi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam ullius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primũ metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri; neque alius quisquam ullũ metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atque idcirco, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum. 6. octaui.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLION.

VT theorema, quod secũdo loco in scholio precedẽtis ppos. demõstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc ppos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, uel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1. theoremate scholij præcedentis.

8.

THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; sitque ut A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis ĩ ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, ut A, ad B, atque adeo ut E, ad F, ita G, ad K. Quare cũ G, & K, inter se primi sint, nempe extremi minimorum numerorum, ac propterea

A,24.	C,36.	D,54.	B,81
G,8.	H,12.	I,18.	K,27.
E,32.	L,48.	M,72.	F,108.
A,40.	C,20.	D,10.	B,5
G,8.	H,4.	I,2.	K,1.
E,8.	L,4.	M,2.	F,1.
A,27.	C,9.	D,3.	B,1.
G,27.	H 9.	I,3.	K,1.
E,108	L,36.	M,12.	F,4.

3. *octaui.*

pterea in sua proportione minimi; æque metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita ut numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, singuli singulos. Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt, ex 9. pronunciato; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, ut ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales sunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

23.&21. septimi

SCHOLION.

NON solum ex demonstratione cõstat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadẽ esse proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hæc propositio uera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si uel A, vel B, fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis vero inter numeros sola vnitate differentes; superbipartiens denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportiornalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis

inter

inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, uel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui easdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam nec inter binarium & vnitatem, nec inter duos numeros sola vnitate differentes, ullus numerus interponitur, tantum abest, ut aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri A B, C D, binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quam A B, maior uero quam C D, vnitate quoque. Dico E F, non esse medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur esse A B, ad E F, ut E F, ad C D; ablato ex A B, numero A G, ipsi E F, æquali, ut reliqua sit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipsi C D, æquali, ut relinquatur etiam vnitas H F; erit quoque ut A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum, cum A G, E H, ipsis E F, C D, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B, & C D.

A . . . . . . G . B
E . . . . . H . F
C . . . . . . D

11. *septimi*

E x *quibus fit, nec illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; nec illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu uulgo Secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit. Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo, 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde*

Diapason

Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapente, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc vero in ſeſquitertia conſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inæquales. Ita quoque Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, ſecari ſolet. Sed de his plura in Muſicis.

RVRSVM ex his demonſtrari poteſt, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiuſdem, numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1 demonſtrauimus, quadratum diametri duplũ ſit quadrati ex latere deſcripti; quadratorum uero proportio ſit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus: Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam biſariam ſecet, ut oſtendimus; manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt, diametrum eſſe lateri incõmenſurabilem. qua de re plura ſcribemus in 9. & ultima propos. lib. 10.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrunque eorum, ac unitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere conti-

nue

nue proportionales inter unitatem, & A, nec non inter unitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum æqualis

A,8. C,12. D,18. B,27.
Vnitas.
2. octaui. E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi
1. octaui. inter se primi sunt, erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, ut K, ipsi A; & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia uero, ut constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans uero ipsum G, fecit K; metie-
7. pron. tur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: Meti-
5. pron. tur autem & unitas ipsum E, per E. Aeque igitur metietur unitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. Per defin. ergo 20. proportionales sunt deinceps, unitas & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum sit, ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, se ipsum multiplicans producat I, multiplicans uero ipsum I, faciat
7. pron. N; metietur F, ipsum I, per F; & I, ipsum N, per eundem F:
5. pron. Metitur autem & unitas ipsum F, per F. Aeque igitur metietur unitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. Per definitionem igitur 20. proportionales sunt continue, unitas & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, una cum unitate æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij continue proportionales numeri inter unitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter unitatem, & numerũ N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHO-

SCHOLION.

Perspicvvm autem est, numeros, qui continua proportione cadunt inter numeros A, & B, ac unitatem, habere proportiones denominatas a minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad unitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. asseruimus.

Constat quoque ex demonstratione hac, si numerus se ipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab unitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab unitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipsorum, & unitatē deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

Cadant inter utrunque numerorum A, B, & unitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales; inter A, quidem & unitatem, numeri C, D, E. At vero inter B, & unitatē, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter utrunque A, B, & unitatem. Multiplicantes se mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idē C, multiplicans K, L, & H,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
Vnitas.

faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter utrunque A, B, & unitatem. Quoniam igitur est, ut unitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æque metietur unitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum
5. pron. A: Metitur autem unitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsũ E, & E, ipsum A, per C, metietur. Quare C, seipsũ multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
9. pron. C, 3. F, 6.
Vnitas.

& multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G; & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, &
17. septimi I; erit, ut C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicãs C, & F, fecit I, & G, erit ut C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L, habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt
18. septimi L, & H, erit ut C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, N, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O; habebunt, ex ijs, quæ a nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cũ
18. septimi C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, erit, ut C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, uel B, & unitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, uel F, G, H.

Quocirca si inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLION.

Ex his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri unitati propinquiores, quales sunt C, & F.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hũc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, existentibus C, D, E, A, continue proportinalibus ab unitate D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt utilia; hinc initium sumentes.

SI sint ab unitate duo ordines numerorum continue proportionaliũ, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab unitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab unitate; quarti uero eiusdẽ triplicatã; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius. I. II.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab unitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H: Dico proportionẽ B, tertij ab unitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam inter utrunque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius unus proportionalis; inter B, quidem & unitatem, numerus A:

D, 81.	M, 108.	N, 144.	O, 192.	H, 256.
C, 27.	K, 36.	L, 48.	G, 64.	
B, 9.	I, 12.	F, 16.		
A, 3.	E, 4.			
Vni-	-tas			

At inter F, & unitatem numerus E; cadet quoque inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos, in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem mo- 10. octaui.

 do

do cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter utrunque C, G, & unitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniā igitur ex defin. B, ad F, proportionē habet duplicatam eius, quā habet B, ad I: Est

D,81. M,108. N,144 O,192. H,256.
C,27. K,36. L,48. G,64.
B,9. I,12. F,16.
A,3. E,4.
Vni- -tas

autem ut B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est ut C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

11. SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti uero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, et ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab unitate, ut constat ex scholio propos. 9. huius lib.

Eademq;

Eademque ratione erunt B,N,O,P, ab unitate proportionales; necnon & F,Q,R,S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est, rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate, est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G.

E, 162.		Vnitas.		I, 512.
	D, 54.		H, 128.	
	C, 18.		G, 32.	
	B, 6.		F, 8.	
		A, 2.		
	N, 36.	K, 4.	Q, 64.	
	O, 216.	L, 8.	R, 512.	
	P, 1296.	M, 16.	S, 4096.	

Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q. Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, ut L, ad R, quod utraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R; sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdē rationis B, ad F. Nō secus demōstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri unius ordinis desināt in unitatem, ut ex hac subiecta figura est manifestū, in qua I, est unitas.

F, 81.				I, 1.
	D, 54.	Vnitas.	H, 2.	
	C, 36.		G, 4.	
	B, 24		F, 8.	
		A, 16.		
	N, 575.	K, 256.	Q, 64.	
	O, 13824.	L, 4096.	R, 512.	
	P, 331776.	M, 65536.	S, 4096.	

CAETERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc *modum demonstratis efficiemus propositionem hanc* 10. *Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.*

III. Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT *inter utrunque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot ter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdē rationis D, ad G. Igitur est ut K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L,*

A, 162. *Q*, 216. *R*, 288. *S*, 384. *B*, 512.
F, 54. *O*, 72. *P*, 96. *I*, 128.
E, 18. *N*, 24. *H*, 32.
D, 6. *G*, 8.
C, 2.
K, 9. *L*, 12. *M*, 16.

8. octaui. *cadet quoque vnus medius, nempe N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, unus medius cadit. Simili modo ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt; si sumantur quatuor minimi numeri in ratione D, ad G. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.*

HOC *etiam uerum est, si loco alterius numeri, nempe B, unitas assumatur, veluti perspicuum est in hac subiecta figura, in* *in qua numer⁹ B, vnitas est, caduntque tā inter A, et C, quam inter B, & C, tres numeri*

A, 1048576.	*Q, 32768.*	*R, 1024.*	*S, 32.*	*B, 1.*
	F, 65536.	*O, 2048.*	*P, 64.*	*I, 2.*
		E, 4096.	*N, 128.*	*H, 4.*
		D, 256.	*G, 8.*	
		C, 16.		
	K, 1024.	*L, 32.*	*M, 1.*	

cōtinue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, proinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 11.

DVORVM quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatā habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, unum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes se mutuo C & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratū, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicans fecit E, ex constructione; erit ut C, ad D, ita A, ad E. *17. septimi* Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione; & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; erit quoque, ut C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia uero, existentibus A, E, B, continue proportionalibus, numerus A, ad B, duplicatam rationē

A, 9	E, 21.	B, 49.
C, 3		D, 7.

habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandũ erat.

SCHOLION.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & utrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, ut C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, ut C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A; Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

11. ## THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus

cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A,& B,quorum latera C, & D. Dico inter A,& B,duos medios numeros continue proportionales cadere: Et propoitionem A,ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans C, seipsum faciat E,& D,seipsum multiplicãs faciat F; At C,& D,

A,27.	H,36.	I,48.	B,64.
E,9.	G,12.	F,16.	
C,3.	D,4.		

se mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes uero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C,seipsum, & D,multiplicans fecit E,& G; erit,ut C,ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D,multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; erit quoque ut C,ad D, ita G, ad F; proptereaq; E,G,F,continue proportionales sunt in ratione C,ad D. Rursus,quia ex defin.cubi C,ipsum E,multiplicans fecit A; & ex constructione multiplicans ipsum G,fecit H; erit ut E,ad G,hoc est, ut C,ad D,ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicãs uero ipsum F,ex defin.cubi, fecerit cubum B; erit quoque, ut G,ad F,hoc est,ut C, ad D,ita I,ad B: Est autem & H, ad I,ut C,ad D; quod C,& D,ipsum G, multiplicantes fecerunt ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C,ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I,cadunt continue proportionales. Quoniam uero, existentibus A, H,I, B,continue proportionalibus, numerus A,ad B,triplicatam habet rationem eius, quam habet A,ad H; triplicatam quoque rationem habebit A,ad B,cubus ad cubum, eius, quam habet C,ad D,latus ad latus; cũ sit C, ad D,ut A, ad H. Quã ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

17. septimi · *17. septimi* · *18. septimi*

SCHOLION.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros

numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, ut C, ad D.

EODEM *modo constat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D:*

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9 G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo et ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C; atque adeo inter se compositi sunt. Similiter cum sit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem. Metitur autem & latus D, cubum suum B; immo & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D; Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A; posteriorum vero triū H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi B.

12. ## THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisq; seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT

Sint continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rusum multiplicantes ipsos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue esse proportionales. Multiplicantes A, & B, se mutuo faciant N; & B, C, se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat R, S. Simili

A,2. B,4. C,8.
D,4. N,8. E,16. O,32. F,64.
G,8. P,16. Q,32. H,64. R,128. S,256. I,512.
K,16. T,32. V,64. X,128. L,256. Y,512. Z,1024. ℞,2048. M,4096.

modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, ℞. Quoniam igitur A, multiplicans seipsum, & B, fecit D, & N; erit ut A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum, fecit N, & E; erit etiam, ut A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; erit ut B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit, ut B, ad C, ita O, ad F; propterea que & E, O, F, continue proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione sint continue proportionales, in qua E, O, F, erit ex æquo D, ad E, ut E, ad F; atque adeo D, E, F, continue proportionales sunt. *17. septimi* *17. septimi*

Deinde, quia A, multiplicãs D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc est in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; erit quoque, ut A, ad B, ita Q, ad H. *17. septimi* Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc est B, ad C, seu A, ad B. Et eodem modo, cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita S, ad I; propterea que *18. septimi*

& H,

& H, R, S, I, proportionales sunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, ut H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue sunt proportionales.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256 I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64 X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024, R, 2048. M, 4096.

NON dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, esse continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

SVNT autem, ut ex demonstratione liquet, numeri primo producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri secundo geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio procreati, in quadruplicata, & sic deinceps semper vno amplius.

BREVIVS propositionem totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in seipsos, numeri D. E, F; & in hos ex eisdem numeri G, H, I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L, M. Dico D, F, F; & G, H, I; & K, L, M, esse quoque continue proportionales. Nam

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. E, 16. F, 64.
G, 8. H, 64. I, 512.
K, 16. L, 256. M, 4096.

ex scholio propos. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue sunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theoremate scholij propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, uel B, ad C. Sed eiusdem rationis B, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad

A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G, H, I esse proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

Ex qua rursum demonstratione apparet, numeros primum productos esse in duplicata ratione datorum numerorum; secundo vero procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius elicitur ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib.

QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eandem tamen propositionem demõstrabimus, etiãsi plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quã tres A, B, C, D, continue proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciãt E, F, G, H; postea vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps.

A, 2.	B, 4.	C, 8.	D, 16.
E, 4.	F, 16.	G, 64.	H, 256.
I, 8.	K, 64.	L, 512.	M, 4096.

Quoniam igitur E, F, G, ex demonstratis, proportionales sunt in ratione A, ad B: Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc est, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in se ipsos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in se ipsos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodẽ modo producti.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 13.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratũ B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, ut vtliquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A,E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; metietur quoque A, primus secundũ E. Quare cum sit ut A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

7. octaui.

A,4.	E,12.	B,36.
	C,2.	D,6.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, ut C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerũ metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

14.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, ut A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8.	H, 24.	I, 72.	B, 216.
E, 4.	G, 12.	F, 36.	
C, 2.	D, 6.		

7. octaui

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubũ metiri

metiri cubum B. Eodem enim argumento erit,ut C,ad D, ita A,ad H, propterea quod A,H,I,B,continue proportionales sunt in ratione C,ad D,ut ostensum est propos.12.huius lib. Quapropter metiente C, latere latus D, metietur & A, ipsum H; ac idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib.demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neq; latus unius metietur alterius latus. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius: neq; quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B,quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C,ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A,metitur D,latus quadrati B; metietur & quadratus A, quadratum B. 14.octaui Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C,metietur latus D.

A, 16.	B, 81.
C, 4.	D, 9.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; metietur quoque C, latus illius D, 14.octaui latus huius. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B,non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

Sint cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

15. octaui.

A,8. B,27.
C,2. D,3.

Sed iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

15. octaui.

SCHOLION.

Proxime antecedentes quatuor propositiones hoc etiã modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et si unius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si uero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus

dratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit. 14. & 15. octaui.

QVOD si latus C, lateris D, multiplex sit; metietur latus D, latus C. Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur; Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex. 14. & 15. octaui.

A, 36.	B, 9.
C, 6.	D, 3.
A, 64.	B, 8.
C, 4.	D, 2.

AT vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex; nō metietur B, ipsum A, quadratus quadratū, aut cubus cubū. Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex. 16. & 17. octaui.

A, 49.	B, 9.
C, 7.	D, 3.
A, 125.	B, 8.
C, 5.	D, 2.

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex; non metietur D, latus latus C. Igitur nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit. 16 & 17. octaui.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 16.

DVORVM similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius uero illis proportionalia E, F, ita ut C, D, se mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B; sitque ut C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere unum numerum medium proportionalem, &

proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterũ homologorum C, F, uel D, F. Multiplicantes se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, ut E, ad F; erit permutando C, ad E, ut D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; erit A, ad G, ut C, ad E, hoc est, ut D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit quoque G, ad B, ut D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, uel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A,12. G,18. B,27.
17. *septimi* C,6. D,2. E,9. F,3.

QVIA uero, existentibus A, G, B, continue proportionalibus, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, uel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, uel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, uel D, F, assumptorum.

CONSTAT *etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, ut C, ad E, uel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, uel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, ut C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, ut C, ad E, uel D, ad F: metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare* *re cum & E, F, latera suum planum B, metiātur, habebunt G, B, communem mensuram tam E, quam F, ideoque erunt inter se compositi.*

Ex quā demonstratione etiā manifestum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E, F, latera plani posterioris B.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

DVORVM similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

Sint solidi numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, E, huius uero illis proportionalia F, G, H, ita ut sit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, sicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, esse triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, uel D, G, uel E, H.

A,30.	M,60.	N,120.	B,240.
	I,6.	L,12.	K,24.
C,2.D,3	E,5.	F,4.G,6.H,10.	

Multiplicantes se mutuo C, D, faciant I; & F, G, se mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, se mutuo multiplicantes faciant L. Postremo E, H, ipsum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipsis F, G, H, proportionales sunt; erunt & permutando proportionales, nimirum ut C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam uero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; erit ut C, ad F, ita I, ad L. Simili 17. *septimi* modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; erit quoque ut D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H. Et quoniam A, solidus factus est ex mutua multiplicatione laterum C,D, E; factus est autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit ut E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F,G, H; & K,factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H,ipsum K, multiplicans faciet B. Quare cum E,multiplicans I, & L,fecerit A, & M; erit A,ad M,ut I,ad L, hoc est, ut C, ad F, uel D,ad G, uel E, ad H.

A,30. M,60. N,120. B,240.

17 septimi I,6. L,12. K,24.

C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; erit N, ad B, ut L, ad K, hoc est, ut C, ad F, uel D,
18. septimi ad G, uel E, ad N. Est autem & M, ad N, ut E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipsos M, & N. Igitur A,M, N,B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, uel D,ad G,uel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N,continue proportionales cadunt.

QVONIAM uero, existentibus A, M, N, B, proportionalibus continue, proportio A,ad B, triplicata est eius, quam habet A,ad M; Est autem A,ad M, ut C,ad F,uel D, ad G,uel E,ad H; Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, uel D,ad G,uel E,ad H,latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, uel E, ad H; liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, assumptorum.

EX ijs, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M, N, & utrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos: Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, uel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera suum solidum B, consequentes

quentes consequentem; si de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem; quod sit N, ad B, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur; (cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L; metietur E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt ipsis I, L, K; metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum suum I. Igitur & C, D, ex pronunciato 11. metientur ipsum M; Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nempe latera suum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram tam C, quam D, quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A, ad M, ut C, ad F, uel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipsum M, consequentes cõsequentem. Metiuntur uero & F, G, H, ipsum N, (cum enim N, factus sit ex H, in L, per constructionem; metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsis I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit ex I, in E; metietur etiam L, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F, G, ipsum N; atque adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Nec non & ipsum B, nimirum latera suum solidum. Igitur M, N, B, communem habent mensuram tam E, quam G, quam H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A; At vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum trium numerorũ M, N, B.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

SI inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ra

tione A,C,B. Quia igitur D,E,minimi sunt in ratione A,
21 *septimi* ad C; metientur D,& F,ipsos A,& C,æque: metiantur per
F. Similiter æque metientur ipsos C,& B: metiantur per G.
Itaque F,multiplicans D,& E,
9. *pron.* faciet A, & C: Item G, eosdem D, & E,multiplicans faciet C,& B. Quia ergo E,multiplicans F,

A,18. C,24. B,32.
D,3. E,4. F,6. G,8.

17. *septimi* & G,fecit C, & B; erit, ut C,ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B,ita erat D,ad E: Igitur erit ut D,ad E, ita F, ad G; & permutando ut D,ad F,ita E,ad G. Quoniam uero F,multiplicans D,fecit A; erit A,planus, cuius latera D, F. Simili modo,quia G,multiplicans E,fecit B; erit & B,planus cuius latera E,G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia,nempe D, ad F,ut E,ad G; erunt ex defin. A,B plani similes. Quare si inter duos numeros unus, &c. Quod demonstrandum erat.

19. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A,& B,esse similes solidos. Sumantur tres E, F,G,minimi in ratione A, C, D,B. Quoniam igitur inter
20. *octaui* E,& G, medius cadit proportionalis F; erunt E, & G,plani similes. sint ipsius E, latera H,I; ipsius uero G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F,G,minimi in ratione A,C,D, existentes, æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cũ illis; metiantur per M. Eodemque modo, quia E,F,G, æque metiuntur C,D,B,eandẽ habentes

A,24. C,72. D,216. B,648.
E,1. F,3. G,9.
H,1. I,1. M,24. K,3. L,3. N,72.

21. *septimi.*
A,8. C,12. D,18. B,27.
E,4. F,6. G,9.
H,2. I,2. M,2. K,3. L,3. N,3.

habentes rationem cum illis; metiantur per N; ita ut M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia uero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, ut ostendimus; erit C, ad D, ut M, ad N: Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F, quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem quam H, K, uel I, L; Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll propos 19. huius lib in ratione laterum homologorum H, K, uel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L ut M, ad N; & permutando H, ad I, ut K, ad L; & I, ad M, ut L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B: Quam ob rem, si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

9. pron. *18. septimi* *17. septimi*

SCHOLION.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet improprie, ut in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem a numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B. Hoc autem est absurdum, cũ Euclides propositionem generaliter proponat, demonstretque sine vlla exceptione.

THEOR. 21. PROPOS. 22.

20.

SI tres numeri deinceps sint proportio-

 nales,

nales; primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum inter

A, 9. B, 54. C, 324.

A, & C, cadat medius proportionalis; erunt A, & C, plani

20. octaui ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

21.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medii proportionales B, C; erũt

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

21. octaui A, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quam ob rem, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

HAEC eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio præcedentium duarum propoſitionũ; quam qui diligenter examinare uelit, inueniet ſane mancam eſſe, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21 lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunque lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibuſdam lateribus unius proportionalia ſint quædam alterius; Iure optimo quis

quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, ut duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoque æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. uel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, nempe & inter se æqualia? Idem dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad unitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nempe unus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, nimirum unus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C. numeri sunt continue proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

A, 36.	B, 48.	C, 64.
	D, 6.	E, 8.
	Vnitas.	

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum

sum C, æque, ex iis, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; cadet inter A, et D, quadratos medius unus proportionalis, ut G. Quia vero est, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F; cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nempe H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; metietur idem & secundum H.

A, 36. B, 48. C, 64.
G, 18. H, 32.
11. octaui. D, 9. E, 12. F, 16.
L, 64. K, 8. I, 4.

8. octaui. 7. octaui. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerũ K, quoties F, ipsum H, ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. Itaque quia ratio L, ad F; quadrati ad quadratum, duplicata

11. octaui est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quod conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, ut C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

20. octaui ALITER. Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C, ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se; erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E, cadatque inter D, & E, medius proportionalis H; cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
20. septimi D, 3. E, 12. F, 4. G, 16.

A, 36. B, 48. C, 64.
H, 6. I, 8.
8. octaui D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.

20. septim.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum

ſum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in ſe facit F, & in F, facit A; erunt, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertẽdo proportionales quoq; erũt numeri A, F, E, & vnitas.

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.
F, 16.			H, 100.
	E, 4.	G, 10.	
		Vni. tas.	

Itaque cum inter numerum D, & vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui ſint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue ſunt proportionales; fiet H, ex G, in ſe, & D, ex G, in productum H, vt ad propoſ. 10. huius lib. a nobis eſt demonſtratum. Quare D, cubus eſt, ex definitione, cuius latus G.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D; metietur E, ipſum A, & H, ipſum D, æque, per ea, quæ ad propoſ. 21. lib. 7. demõſtrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorũ, cubi ſunt, ex 1. coroll. propoſ. 2. huius lib. Eſt autem & A, cubus, ex hypotheſi; cadent inter E,

A, 64.	B, 160.	C, 400.	D, 1000.
K, 32.			M, 500.
I, 16.			L, 250.
E, 8.	F, 20.	G, 50.	H, 125.
	P, 1000.	O, 10.	N, 5.

A, cubos duo medij proportionales, qui ſint I, K. Quoniam autem, ex æquo, eſt vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui ſint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, metietur idem & L, ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L; ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O. Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H; erit P, ad H, ut D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus

Margin notes: 12. octaui; 8. octaui; 7. octaui; 12. octaui *cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.*

22. ## THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

SIT A, ad B, ut C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit A, ad F, ut C, ad D; cadat autem inter C, & D, quadratos unus medius proportionalis, nempe E; cadet quoque inter A, & B, medius unus, qui sit F.

11. octaui

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

8. octaui

Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit & B, tertius, quadratus.

22. octaui

Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cũ primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, esset & 8, quadratus; Igitur & 16. & 32. &c. quod est absurdum.

24. octaui

24. octaui

23. ## THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum,

merum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit.

SIT A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum: ſitque A, cubus. Dico & B cubum eſſe. Cum enim ſit A, ad B, ut C, ad D; cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, nimirum E, F; 12.octaui

A,8.	G,12.	H,18.	B,27.
C,64.	E,96.	F,144.	D,216.

cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui ſint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, ſunt cõtinue proportionales, & A, primus eſt cubus; erit & B, quartus cubus. Quocirca, ſi duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat. 8.octaui 23.octaui

CORROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus. 25.octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani ſimiles A, & B. Dico eſſe ut A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratũ. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles, cadet inter eos unus medius proportionalis, uidelicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi 18.octaui

A,20.	C,30.	B,45.
D,4.	E,6.	F,9.

tremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, ut D ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, ut est quadratus aliquis, nempe D, ad quadratum alium, ut ad F. Ergo similes plani numeri rationẽ inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

A,20.	C,30.	B,45.
D,4.	E,6.	F,9.

SCHOLION.

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quã quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. Quoniam inter quadratos C, D, cadit vnus medius
11.octaui *proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita*
8.octaui *A, ad B; cadet quoque medius proportionalis inter A, & B. Quare A, & B,*
20.octaui *plani similes sunt.*

A,8.	*B,18.*
C,16.	*D,36.*

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratũ. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

25.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, ut A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum.
19.octaui Quia A, B, sunt solidi similes, cadent inter eos duo medij propor-

proportionales, qui ſint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo ſit A, ad B, vt E, ad H, conſtat ita eſſe A, ad B, ut eſt cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, nempe ad H. Similes ergo ſolidi numeri rationem habent inter ſe, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLION.

CONVERSVM huius etiam demonſtrabimus; ſcilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quã cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles.

NVMERI A, B, proportionem habeant inter ſe, quam cubi C, D. Dico A, B, ſolidos eſſe ſimiles. Nam cum ſit A, ad B, vt C, ad D; cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; 12. octaui *cadent quoque inter* 8. octaui *A, B, duo medij. Sunt ergo A, & B, ſolidi ſimiles.* 21. octaui

A, 16,	*B, 54.*
C, 64.	*D, 216*

EX his omnibus perſpicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, uel ſeſquialteram, vel ſuperbipartiẽtem, eſſe ſimiles planos, vel ſolidos. Si enim eſſent ſimiles plani, caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri nõ poſſe iam dudum oſtenſum eſt in ſcholio propos. 8. huius lib. Eadẽ 18. octaui *ratione non erunt ſimiles ſolidi, cum inter eos cadere non poſſint duo medij proportionales; Nam alias caderent quoque duo* 8. octaui *medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non poteſt, quod hi vel ſola vnitate, vel certe binario tantum inter ſe diſtent, ut in ſcholio prædicto traditum eſt; inter quos certum eſt non poſſe intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.*

SIMILITER nec duo quiuis nnmeri primi eſſe poſſunt plani ſimiles, vel ſolidi, cum non poſſint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui ſit numerus primus,

mus, latera habet solummodo vnitatem, & seipsum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quiuis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantum habet duas unitates, & se ipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horũ multiplicatione producantur. Perspicuum autem est ea non posse esse proportionalia.

VNDE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel sesquialteram, uel superbipartientem, vel certe duo numeri primi, erunt illi ipsi per ea, quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter uero non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, haberent pro-
26.octaui *portionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur*
24.octaui *16. quadrato, esset & 20. quadratus. quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.*

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. 40. Si
27.octaui *enim essent solidi similes, haberent proportionem, quam cubus*
25.octaui *ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit, esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.*

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM IX.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVo numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. *17.septimi* At inter A, & B, cum sint plani similes, unus medius cadit proportionalis. *18.octaui* Igitur & inter D, & C, unus medius proportionalis cadet. *8.octaui* Cadat ergo E, ut sint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; erit quoque C, tertius, quadratus. *22.octaui* Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

A,6.	B,54.	
D,36.	E,108.	C,324.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

Dvo numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratū.

A,6. B,54.
17. ſeptimi D,36. C,324.

Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter D, & C, quadratos
11. octaui unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter A, & B,
8. octaui. unus medius proportionalis cadet. Ac propterea A, & B,
20. octaui ſimiles plani ſunt. Quare ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

Ex his demonſtrabimus quatuor inſequentia theoremata non inutilia.

I. Si duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

Dvo quadrati A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe quadratum. Cum enim A, & B, ſint ſimiles plani, nempe quadrati; erit C, ex eis productus, quadratus.

A,4. B,25.
C, 100.

1. noni.

II. Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

Dvo numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; ſitque A, quadratus. Dico & B, quadratum eſſe. Cum enim A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; erunt

A,9. D,12. B,16.
C,144.

2. noni. *A, & B, ſimiles plani: atque adeo inter eos unus medius ca-*
18. octaui *det proportionalis, nempe D. Quare A, exiſtente quadrato,*
22. octaui *erit & B, quadratus.*

III. Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant

ciant non quadratum; alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Dvo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; sitque A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20. C, 80.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit. IIII.

Dvo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

Faciat cubus A, se ipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D; metietur C, ipsum D, per C: Metitur autem & unitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est unitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nempe denominata a C; Ac proinde

A, 8. E, 16. D, 4. F, 32. C, 2. B, 64. Vnitas.

7. pron.
5. pron.

20. *defin.* proinde ut unitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multi-
7. *pron.* plicans D, fecit A; metietur D, ipsum A, per C: Metiebatur
autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ
20. *defin.* D, ipsius A; ideoque ut C, ad D, ita D, ad A: sed ut C, ad D, ita erat unitas ad C. Igitur ut unitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atq; adeo inter unitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D.

A, 8.	
E, 16.	D, 4.
F, 32.	C, 2.
B, 64.	Vnitas.

7. *pron.* At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A, se ipsum multiplicans fecerit B; metitur uero & uni-
5. *pron.* tas ipsum A, per A: Eadem erit pars unitas ipsius A, quæ
20. *defin.* A, ipsius B; Ac propterea erit ut unitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter unitatem & numerũ A, cadant duo me-
8. *octaui* dij proportionales C, & D; cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales; & A, primus sit cubus; erit
23. *octaui.* quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; eritq;
3. *noni.* D, cubus. Quoniam uero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut
17. *septimi* A, ad B, ita D ad C. At inter A, & B,
12. *octaui.* cubos duo medij proportionales ca-
8. *octaui* dunt. Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales
23. *octaui* cadent; Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quo circa si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C, Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C; At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. Totidem igitur & inter A, & B, cadent; Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrẽ si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

3. noni.
17. septimi
12. octaui.
8. octaui.
25. octaui

A, 8.	B, 27.
D, 64.	C, 216.

SCHOLION.

Ex his & hæc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I. SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; & multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur. 5. noni.

A, 8.	*B*, 20.
	C, 160.

II. SI cubus numerus numerum quendã multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus; & factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim. 4. noni.

A, 8.	*B*, 17.
	C, 136.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus se ipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS se ipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, ut perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; erit & A,

5. noni. cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat; &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8. B, 64. C, 512.

SCHOLION.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: Ergo inter

12. octaui *B, & C, cubos duo medij propor-*

17. septimi *tionales cadunt. Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit; cadent*

8. octaui *quoque inter A, & B, duo medij proportionales; Atque adeo*

23. octaui *existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio breuior est, & planior, ut perspicuum est.*

A, 8. B, 64. C, 512.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit

A, sit compositus, metietur eum, præter unitatem, numerus aliquis: metiatur D ipsum A per E. Quo posito; multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C, procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum. 13. defin. 9. pron.

A,6. B,11. C,66.
D,2. E,3.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus uero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertiũ quidẽ B, ab vnitate esse quadratum, & unũ intermittentes

Vnitas. A,3 B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. K,59049, L,177147. M,531441.

omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum uero F, cubũ simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam est unitas ad A, ut A, ad B, æque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum B; Metitur autem unitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B, 5. pron. 9. pron.

22. octaui quadratus est. Quia uero tres deinceps proportionales sunt B, C, D; & est B, quadratus; erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, sit quadratus, & F, quadratus erit; Nec non & omnes unum intermittentes.

RVRSVS quia est unitas ad A, ut B, ad C; æque metietur unitas numerum A, & numerus B, numerum C. Me-

Vnitas.	A, 3.	B, 9.	C, 27.	D, 81.	E, 243.	F, 729.	G, 2187.
H, 6561.	I, 19683.	K, 59049.	L, 177147.	M, 531441.			

5. pron. titur autem unitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C,
9. pron. per A, metietur; atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, se ipsum multiplicans faciat B, multiplicans uero B, faciat C, ut est ostensum; erit C, cubus. Quia uero quatuor deinceps proportionales
23. octaui sunt C, D, E, F, & est C, cubus; erit & F, cubus. Eodem argumento assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cum F, sit cubus; & I, cubus erit; atque omnes semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab unitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

HOC *theorema potest quoque hoc modo proponi.*

SI sint quotcunque numeri ab unitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, undecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autẽ, qui sequuntur proxime numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimus sextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes uero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimo octauo, uigesimo quarto, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, uigesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes semper unum intermittunt post tertium ab unitate: At secundi ordinis numeri omitttunt semper duos numeros post quartum ab unitate. Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post vnitatem sit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus unitati

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ti quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab unitate, & omnes unum intermittẽtes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, iam demonstratũ est. Quod 8. noni.
uero

8. *noni.* uero & reliqui intermedij C,& E,quadrati sint, ita perspicuũ fiet. Cum tres continue proportionales sint A,B,C; sitque

Vnitas. A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

22. *octaui* A quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, sit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales.

SIT iam A, proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos

Vnitas. A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

8. *noni.* intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, iam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit unitas ad A, ut A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur,
5. *pron.* & A, ipsum B, per se ipsum metietur; Atque adeo cubus A, se ipsum multiplicans numerum B, procreabit. Quare B, cu
9. *pron.* bus est. Quoniam uero quatuor continue proportionales
3. *noni.* sunt A,B,C,D, estque A, cubus; & D, cubus erit. Eademq;
23. *octaui* ratione assumptis quatuor deinceps proportionalibus B,C, D,E, cum B, cubus sit, & E, cubus erit. Omnes igitur A,B, C,D,E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post unitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua uero parte est quadratus, ea ratione & reliqui

reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatē, non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatē, non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I; & primum A, proximus unitati non sit quadratus. Dico nec alium ullum esse quadratum, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, nempe præter B, D, F, H. Si enim præter hos alius

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16 E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

est quadratus, sit quadratus E. Cum ergo & D, sit quadratus, sitque ut D, ad E, uel E, ad F, ita A, ad B; & conuertendo ut E, ad D, uel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, uel quadratus F, ad quadratum E: sed B, tertius ab unitate est quadratus. Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus nullum alium, præter dictos, quadratum esse. 8. *noni.* 8. *noni.* 24. *octaui*

SED iam A, proximus unitati non sit cubus. Dico nec alium ullum esse cubum, præter quartū ab unitate, & duos intermittentes omnes, uidelicet præter C, F, I. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo ut D, ad F, ita A, ad C, (quod tres 8. *noni.*

D, E,

D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo ut F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, ratio-
8. noni. nem, quam cubus F, ad cubum D: Sed C, est cubus, nempe

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

25. octaui quartus ab unitate. Igitur & A, primus ab unitate cubus erit. quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est.
8. noni. Quod si E, credatur esse cubus; cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, ut C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo ut cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo,
25 octaui erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque ullos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab unitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab unitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab unitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post unitatem, cubus quidem, nõ autem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem,

Vnitas. A, 8. B, 64.

9. noni. *quod primo existente cubo, omnes cubi sunt; quadratum uero,*
8. noni. *quod tertius sit ab unitate.*

SIT deinde A, post unitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul & quadratum; Cu-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

8. noni. *bum quidem, quod quartus sit ab unitate; quadratum uero,*
9. noni. *quod primo existente quadrato, omnes sunt quadrati.*

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus.

dratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratũ, præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

enim primo non existente quadrato, nullus alius quadratus sit, præter tertium ab unitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, undecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, nullus alius sit cubus præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, ut ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hæc loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, ut liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit. 10. noni. 10. noni.

THEOR. 11. PROPOS. 11. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorẽ, ut

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

C, quemlibet maiorem, ut G, metiri per aliquem numerorũ A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo ut C, ad G, ita unitas ad D; (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem cum unitate & numeris A, B, C, D,) æque metietur unitas numerum D, atque numerus C, numerum 11. 20. defi.

merum

5. pron. merum G: Sed unitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit ut E, ad F, ita unitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cum sit ex æquo ut A, ad G, ita unitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo: Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat ostendendum.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest maior numerus a minore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, ut ex demonstratio-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

ne apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nempe per se ipsum, &c.

HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui se ipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab unitate Si vero minor aliquis maiorem quempiã multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab ab vnitate; propterea quod si numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, producatur ille, quem metitur. Ergo C, se ipsum multiplicans gignet F, cum F, tantum absit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.

9. pron.

11.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque pri-

morum

morum numerorum ultimum metiuntur, ijdem & eum, qui unitati proximus est, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A. Si namque non metitur ipsum A; erit E, cum primus sit, ad A, primus. 31. septimi

Metiatur autem E, ipsum D, per

Vnitas.	A,10.	B,100.	C,1000.	D,10000.
E,5.	H,20.	G,200.	F,2000.	

F, atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia uero & A, ipsum D, metitur per C, ac proinde A, multiplicans C, facit D, ut in scholio præcedentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. Quare erit ut A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia uero & A, ex scholio eodem, metitur C, per B, atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum. & ex E, secundo in G, tertium. Erit igitur ut A, primus ad E, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cũ A, & E; sint inter se primi; metietur æque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B, per H, ita ut E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, ac idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, ut ex eodem scholio apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex A, medio in se, & ex E, primo in H, tertium. Quare erit ut E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium; atque adeo, cũ E, & A, inter se primi sint, æque metietur E, ipsũ A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum

Marginal references: 9. pron. — 19. septimi — 21. septimi — 9. pron. — 19. septimi — 21. septimi — 9. pron. — 20. septimi — 21. septimi sum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumẽto ostendemus, quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes, metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, uel B, ultimus numerus statuatur. Si igitur ab unitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

ALITER. Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico, & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; erit

31. *septimi* E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, se ipsũ multiplicans facit B, ut apparet ex scholio propos. præcedentis;

Vnitas. A,6. B,36 C,216. D,1296.
E,3.

27. *septimi* erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt, fit autem C, ex A, in B, per idem scholion; erit C, ad

26. *septimi* E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt, & fit D, ex A, in C, per idem scholiõ; erit D, ad

26. *septimi* E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est cõtra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A.

SCHOLION.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod uidetur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium uideatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturque se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse; Quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius uim huius demonstrationis expẽdisset, vel certe, si expendit, eam in memoriam reuocaßet; quãdoquidem ipso longe prior Euclides vsus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum.

CAETERVM ex demonstratis perspicuum est, quemcunque *cumque numerũ primũ, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes, quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris; manifestum est, quod & ille omnes metiatur.* 12.noni 11.noni

THEOR. 13. PROPOS. 13. 13.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit; Maximũ nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab unitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum ergo est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; metietur quoque ipsum A, unitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; metietur quoque ille alius primus eundem D, atque adeo & ipsum A, primum existentem, nimirum unitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; & uicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nempe is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per

12.noni

Vnitas.	A,5.	B,25.	C,125.	D,625.
	E ——	H ——	G ——	F ——

33. septimi

11. pron.

12. noni

8. pron.

11. noni per E. Cum ergo quilibet ipſorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipſorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipſorum A, B, C, quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, nõ idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniam uero E, metitur D, per

8. pron. Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E ----- H ---- G ---- F ----

F; metietur uiciſſim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus. ſi enim ſit primus, & metiatur D, ultimũ; *12. noni* metietur; & A, proximum unitati, qui primus eſt quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; *33. ſeptimi* atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A. Si namque alius primus quam A, metiatur F; cum F, metia- *11. pron.* tur D, extremum; metietur quoque ille alius primus eun- *12. noni* dem D, atque adeo & ipſum A, proximum unitati, qui primus eſt quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quã A, ipſum F, metitur. Iam uero quoniam E, metitur D, per *9. pron.* F; fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, ut in ſcholio propos. 11 huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, ter- *19. ſeptimi* tium; Ac proinde erit ut A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Metitur autem A, ipſum E, ut oſtẽſum eſt: Ergo & F, ipſum C, metietur: Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuerſus ab A, B, metitur C, ultimum, (relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter G, diuerſum eſſe ab A, B, & non primum, ſed compoſitum, quem ſolus A, primus metiatur: quemadmodum id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diuerſus ab A, B, C, metiebatur D, ultimum.

Si enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B; metiaturq; F, ipſum C, per G; metietur utique F, ipſum C, per *8. pron.* aliquẽ ipſorum A, B; & uiciſſim aliquis ipſorum A, B (nempe is, per quem F, ipſum C, metitur) metietur C, per F. Cũ *11. noni* ergo quilibet ipſorum A, B, metiatur C, per aliquem ipſorũ A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim F, non eſſe eundem, qui aliquis ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſorum

rum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; metietur uicissim G, ipsum C, per F. Non erit autē G, primus. Si enim primus sit, metiaturque ultimum C; metietur quoque numerum primum A, unitati proximū. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur. quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quā A, metiatur G; cum G, metiatur C, ultimum; metietur quoque ille alius primus eundem C, atque adeo & ipsum A, unitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipsum G, metitur. Iam uero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. Quare erit ut A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, ut demonstratum est: Igitur & G, ipsum B, metietur: metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, ultimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; ostendemus similiter H, diuersum esse ab A; quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

8. *pron.* 12. *noni* 33. *septimi* 11. *pron.* 12. *noni* 9. *pron.* 19. *septimi*

NAM si H, idem sit qui A; metiaturque G, ipsum B, per H; metietur utique G, ipsum B, per A; Et uicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, ut constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem qui A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus Iam uero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, ut in scholio dicto docuimus, Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiū, & ex A, medio in se ipsum. Quare erit ut H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium. At A, metitur ipsum G, ut est demonstratum: Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare existente A, primo, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C: Ac proinde si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

8. *pron.* 9. *pron.* 20. *septimi*

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

Sɪᴛ numerus A, minimus quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim, si fieri potest, primus numerus E, diuersus a B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per

A . . . .
B. . . . C. . . . D. . . . . .
E - - - - F - - - -

9. pron. F; multiplicans E, ipsum F, faciet A. Quare singuli B, C,
32. septimi D, alterum ipsorum E, F, metientur; non quidem ipsum E, primum existentem, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Aᴅᴅɪᴛ hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

15. Sɪ quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, compositus erit ad alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi.

Sɪɴᴛ quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, C, D, E; in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nempe A. Dico H, compositum esse vel ad F, vel ad G. Sumantur enim in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & sic deinceps, donec habeantur tot vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. A, fit ex F, in M; metitur autem H, ipsum A; erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum; si uero ad M, qui quidem fit ex F, in I, ut constat ex demonstratione propos. 2 lib. 8. erit, ex scholio dicto, rursus H, compositus uel ad F, vel ad I. si ad F, habetur propositũ; si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum; erit H, compositus ad F, ex dicto scholio 2. octaui

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54 E, 81.
M, 8. N, 12 O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H —— F, 2. G, 3.

DEINDE metiatur H, secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit ut prius H, compositus vel ad F, uel ad N. si ad F, habetur propositum; si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K; erit H, eodem modo compositus vel ad F, uel ad K. si ad F, habetur propositum; si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G; erit quoque H, compositus uel ad F, vel ad G.

RVRSVS metiatur H, tertium C, qui cum fiat ex F, in O; erit H, compositus uel ad F, uel ad O. Si ad F, habetur propositum; si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compositus vel ad F, vel ad L. si ad F, habetur propositum; si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se; compositus quoque erit H, ad G.

PRAETEREA metiatur H, quartum D, qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, uel ad P. si ad F, habetur propositum; si uero ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus uel ad G, uel ad L. si ad G, habetur propositum; si uero ad L, cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus.

EODEM modo si H, metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metitur primum A; erit H, compositus ad F: Si vero secundum B, metitur; erit compositus vel ad F, vel ad G: Si denique metitur tertium C, vel quartū D, vel quē cunque alium insequentem; compositus erit H, ad G. Id quod perspicue ex demonstratione apparet.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM in theoremate sequente demōstrando theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, tanquam si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse a nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I. SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numeris GH, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex G H, H I, I K, composito. Quoniam C, multiplicans A B, fecit F;

A . . . D . . E . B . C . .
F . . . .
G . . . . . . H . . . . I . . K

7. pron. metietur A B, ipsum F, per C; hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata a C. Eadem ratione A D, ipsius G H; nec non

D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit a C, denominatâ, nempe eadem quæ A B, ipsius F. Quia uero, per ea quæ ad propos 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum. 4. pron.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur. II.

NVMERVS A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirũ quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B, quod est propositum.

D . . . . . .

A . . . . C . . B

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quam in duas secetur, vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nempe quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

E . . . .

A . . . . C . . . D . . B

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, & quadrato, qui a prædicta parte efficitur. III.

SIT numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem esse & ei, qui sub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C.

Sumpto enim numero D, qui dictæ parti A C, æqualis sit; erit ex 1 theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex A C, in A B; vel (quod idem est) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex A C, in C B, & ex D, hoc est, ex A C, in A C, quadrato scilicet ipsius A G. Quod est propositum.

D . . . . .

A . . . . . C . . . . B

IIII. Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum quadratum ex A B, factum æqualem esse quadratis partium A C, C B, vna cum numero, qui fit bis ex parte A C, in partem C B. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius A B, æqualis est numeris, qui fiunt ex A B, in A C, & in C B. Est autem numerus, qui fit ex A B, in A C, per 3. theorema, æqualis numero genito ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius A C: Item numerus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, vna cum quadrato ipsius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium A C, C B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod est propositum.

A . . . . . . C . . . . B

V. Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Nvmervs A B, secetur in partes æquales A C, C B; & non æquales A D, D B. Dico numerũ sub partibus inæqualibus A D, D B, contentum, una cum quadrato numeri intermedij

medij C D, esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius C B, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, vna cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B; numero vero comprehenso sub C D. D B, *una cum quadrato ipsius* D B, *æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex* C B, *in* DB; *erit numerus quadratus ipsius* C B, *æqualis etiam reliquo quadrato ipsius* C D, *vna cum reliquo numero facto ex* C D, *in* D B, *& numero ex* C B. *hoc est, ex* A C, *in* D B, *producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex* C D, *in* D B, *& ex* A C, *in* D B, *æqualis est numerus, qui fit ex* A D, *in* D B. *Igitur quadratus ipsius* C B, *æqualis erit quadrato ipsius* C D, *una cum numero qui fit ex* A D, *in* D B; *hoc est, numerus factus ex* A D, *in* D B, *vna cum quadrato ipsius* C D, *æqualis est quadrato ipsius* C B. *Quod est propositũ.*

A . . . . . C . . . D . . B

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, una cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS *A B, secetur in partes æquales* A C, C B, *eique adijciatur numerus* B D. *Dico numerum factum ex toto* A B, *& adiecto* B D, *tanquam vno, in adiectum* B D, *una cum quadrato dimidij numeri* CB, *æqualem esse quadrato, qui fit ex* C B, *dimidio & adiecto* B D, *tanquam vno. Cum enim quadratus ipsius* C D, *per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium* C B, BD, *vna cum numero bis comprehenso sub* CB, B D, *hoc est, una cum numeris sub* C B, B D, *& sub* AC, BD, *comprehensis; numeris autem contentis sub* C B, BD, *& sub* A C, B D, *& sub* B D, B D, *hoc est, quadrato ipsius* B D, *æqualis sit, ex 1. theorem. numerus factus ex* A D, *in* B D; *erit quadratus ipsius* C D, *æqualis reliquo quadrato ipsius* C B, *una cum numero facto ex* A D, *in* B D; *hoc est, numerus factus ex*

A . . . . C . . . . B . . D

ex A D, *in* B D, *una cum quadrato ipsius* C B, *æqualis est quadrato ipsius* C D. *Quod est propositum.*

VII. Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

Dividatur numerus A B, *in partes* A C, C B. *Dico quadratum totius* A B, *vna cum quadrato partis* C B, *æqualem esse numero bis, qui fit ex toto* A B, *in dictam partem* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C.

A . . . . . C . . . B

Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius A B, *æqualis sit quadratis partium* A C, C B, *una cum numero, qui fit bis ex* A C, *in* C B; *si quadratus ipsius* C B, *addatur communis; erunt quadrati numerorum* A B, C B *simul, æquales quadratis numerorum* A C, C B, C B, *vna cum numero qui fit bis ex* A C, *in* C B. *Atqui ei, qui fit ex* A C, *in* C B, *una cum quadrato ipsius* C B, *æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex* A B, *in* C B; *Ac proinde ei, qui fit bis ex* A C, *in* C B, *vna cum quadrato ipsius* C B, *bis, æqualis est, qui fit bis ex* A B *in* C B. *Igitur quadrati numerorum* A B, C B, *simul, æquales sunt numero, qui fit bis ex* A B, *in* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C. *Quod est propositum.*

VIII. Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

Secetur numerus A B, *in partes* A C, C B. *Dico numerum, qui fit quater ex toto* A B, *in partem* C B, *vna cum quadrato reliquæ partis* A C, *æqualem esse quadrato numeri, qui ex toto* A B, *& prædicta parte* C B, *cōponitur.* Addito enim *numero* B D, *qui æqualis sit di-*

A . . . . C . . . B . . . D

ctæ

ctæ parti C B; *cum quadratus totius* A D, *compositi ex* A B, *&* B D, *siue dicta parte* C B, *sit æqualis per* 4. *theorema, quadratis numerorum* A B, B D, *vna cum numero qui fit bis ex* A B, *in* B D, *hoc est, quadratis numerorum* A B, C B, *una cum eo, qui fit bis ex* A B, *in* C B; *Sint autem, ex* 7. *theorem. quadrati numerorum* A B, C B, *simul æquales numero bis comprehenso sub* A B, C B, *vna cum quadrato numeri* A C; *Erit quadratus factus ex* A D, *æqualis numero, qui fit quater ex* A B, *in* C B, *vna cum quadrato reliquæ partis* A C. *Quod est propositum.*

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur. IX.

Divisus sit numerus A B, *in partes æquales* A C, C B, *& non æquales* A D, DB. *Dico quadratos partium inæqualium* A D, D B, *duplos esse quadratorum, qui ex* A C, *dimidio, & ex* C D, *numero intermedio efficiuntur. Cum enim quadratus numeri* A D, *æqualis sit, ex* 4. *theorem. quadratis numerorum* A C, C D, *una cum numero bis, qui fit ex* A C, *in* C D; *Si communis apponatur quadratus partis* DB; *erunt quadrati partium* A D, DB *æquales quadratis partium* A C, C D, D B; *vna cum numero bis, qui fit ex* A C, *hoc est, ex* C B, *in* C D. *Atqui quadrato ipsius* DB, *vna cum numero bis, qui fit ex* CB, *in* CD, *æquales sunt, ex* 7. *theorem. quadrati, qui fiunt ex* C B, *hoc est, ex* A C, *&* C D. *Igitur quadrati partium* A D, D B, *æquales sunt quadratis partium* A C, C D, *bis; Ac propterea quadrati partium* A D, D B, *dupli sunt quadratorum, qui ex partibus* A C, C D, *fiunt. Quod est propositum.*

A . . . . . C . . . D . . B

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli X.

pli

pli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio, & adiecto.

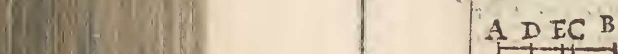
SIT numerus A B, diuisus in partes duas æquales A C, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compositi ex toto A B, & adiecto B D, & quadrati adiecti numeri B D, vtrosque simul, duplos esse quadratorum, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex

A . . . . C . . . . B . . D

CD, composito ex C B, dimidio, & adiecto B D. Cum enim quadratus ipsius A D, æqualis sit, ex 4 theorem. quadratis partium A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex CB, in C D; si communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, una cum numero bis, qui fit ex C B, in CD. Sed per 7. theorema, quadrato ipsius B D, una cum numero bis, qui fit ex C B, in CD, æquales sunt quadrati numerorū C B, C D; & quadrato ipsius C B, æqualis est quadratus ipsius A C. Igitur quadrati numerorum A D, B D, æquales sunt quadratis numerorum A C, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, BD, dupli sunt quadratorum, qui ex A C, CD, efficiuntur. Quod est propositum.

IAM vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus A B, in C, ita vt numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contentus sub extremis A B, CB, æqualis est quadrato numeri medij A C;



20. septimi *erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Est autem A B, maior quam A C. Igitur & A C, maior est quam C B. Ablato iā CD, qui ipsi CB, sit æqualis, erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad CD. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, est vt A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum;*

11. septimi *erit quoque ut totus AB, ad totum A C, vel vt detractus A C ad*

ad detractum C D, ita C B, ex A B; residuus, hoc est, C D, illi æqualis, ad A D, ex A C, residuum. Quia igitur est vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & est A C, maior quam C D; erit quoque C D, maior quam A D. Ablato ergo D E, qui ipsi A D, sit æqualis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaque quia est, ut totus A C, ad totũ C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; erit quoque vt totus A C, ad totum C D, vel ut detractus CD, ad detractum DE, ita A D, ex A C, residuus, hoc est D E, illi æqualis, ad E C, ex C D, residuum. Quare cum sit vt C D, ad D E, ita D E, ad A C; sit autem C D, maior, quam D E; erit etiam D E, maior, quam E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipsi E C, æqualis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum; cum numerus non possit diuidi infinite. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, ut planus numerus ex toto in vnam partium factus; æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum. 11. septimi

ALITER. Quoniam numerus A B, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex A B, in C B, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipsius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B, in C B, vna cum quadrato ipsius A C, quincuplus erit quadrati partis A C. Est autem numerus contentus quater sub A B, C B, vna cum quadrato ipsius A C, quadratus; quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is qui quater continetur sub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quã 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis sit quadrato ipsius A C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis

ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium: Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, se ipsum multiplicantem facere C. Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; erit & uterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam uno in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E tanquam uno in D, æqualis est per 3 theorema scholij precedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

A, 9 B, 12. C, 16.
D, 3. E, 4.

24 *septimi*
30. *septimi*
26. *septimi*
27. *septimi*

DEINDE quia, ut prius, uterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E; efficitur (cum tam cõpositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D.) numerum factum ex D, E, tanquam uno in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam uno in E, æqualis est per 3. theorema scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi sunt; atque adeo ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

B, 2. C, 16.
A, 9.
D, 3. E, 4.

30 *septimi*
26. *septimi*
27. *septimi*

POSTREMO quia, ut prius, uterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est; atque adeo e contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E; erit quoque qui fit ex D, in E, ad compositum ex D, E, primus; Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E,

30. *septimi*
26. *septimi*
27 *septimi*

ex D, E, tanquã uno, in se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam uno, in se, æqualis est, per 4. theorema antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, una cum eo qui ex D, in E, bis: Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis.

A, 9.		C, 16.
	B, 12.	
D, 3.		E, 4.

Quoniam ergo duo numeri simul, nempe compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorũ, ut ad eum, qui fit ex D, in E, ut ostensum est; Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E; atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. *30. septimi* Rursus quia duo numeri simul, uidelicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum; ut ad eum, qui fit ex D in E, primi sunt, ut ostensum est; erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos; atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. *30. septimi* Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erũt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

CAMPANVS hoc theorema aliter demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul

ad

ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumanturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum.

A, 8.	B, 12.	C, 18.	D, 27.
E ---	F, 2.	G, 3.	H, ---

Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum nempe D; erit E, compositus ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius lib. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D.
11. pron. *Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8. metietur quoque*
11. pron. *H, medios B, C; ac propterea, & compositum ex B, C.*
10. pron. *Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, ut demonstrauimus; metietur quoque idem H, reliquum A:*
12. pron. *Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest,*
3 octaui *Non igitur cōpositi inter se sunt, cōpositus ex A, B, C, & numerus D. ergo inter se primi.*

RVRSVS, *si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D; metietur etiam H, eundem compositum ex*
11. pron. *A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C; metietur quoque H, ipsos B, C.*
11. pron. *Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum B; metietur quoque H, compositum*
12. pron. *ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. metietur etiam H, alterum ipsorum A, D.*
11. pron. *Igitur & reliquum.*
12. pron. *Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi.*
3. octaui *Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi*

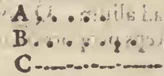
positi sunt. ergo primi. Quod est propositum.

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B, primos; nec non, & B, C, D, simul ad A.

THEOR. 16. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse ut A, ad B, ita B, ad alium numerum: si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita B, ad alium, nempe ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, atq; adeo in sua proportione minimi; *23. septimi* ipsi aeque metientur numeros B, & C, *21. septimi* in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C. Metitur autem & A, se ipsum: Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se existētes. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.


A
B
C

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorū primi inter se sint: Non erit ut primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E

ut A, ad B, ita D, ad alium, uidelicet ad E: Erit igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint
23. septimi inter se primi, minimi in
A, 8. B, 12. C, 18. D, 27 E ----- sua proportione. Igitur
21. septimi æque metientur ipsos B, & E; nempe A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est ut A, ad B, ita B, ad C: Ergo cũ A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C,
11. pron. metietur; atq; ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est ut B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipsum C; metietur &
11. pron. C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, metietur quoque ipsum D. Metitur uero & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos existentes. Quod est absurdum: Non ergo est ut A, ad B, ita D, ad alium numerũ E. Eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

19. PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, considerare an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerũ, ut
A, 4. B, 7. A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt inter se primi;
16. noni perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si uero non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C,
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, immo ipsum D, esse tertiũ proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D; fiet C,
9. pron. ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis

lis est ei, qui ex medio B, describitur; Ac proinde erit ut A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B. 20. septimi

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D; ita ut sit A, ad B, quemadmodũ B, ad D. Quoniam igitur

A,6. B,4. D---. C,16.

est, ut A, ad B, ita B, ad D; erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C; productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem uia considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, ut B, ad A. Duobus ergo numeris datis consideraui mus, &c. Quod faciendum erat. 20. septimi 7. pron.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem aliũ numerum, ut A, ad B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non.

A,8. B,12. C,18. E,27. D,216.
A,4. B,8. C,9. E,18. D,72.

Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, immo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & ter- 9. pron.

 tio

19. septimi tio continetur; Ac propterea erit ut A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

Sed iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalẽ. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus ꝓportionalis E; ita ut sit quemadmodũ A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt;

A,4. B,6. C,9. E ---- D,54.
A,4. B,4. C,10. E ---- D,40.

19. septimi erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare cum D, fiat
7. pron. ex A, in E; metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur nõ metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus nõ metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, ut C, ad B. Quocirca tribus numeris datis cõsiderauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Ex his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus ultimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

Theon, & qui illum sequuntur, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; Aut nõ deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Ubi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonstrationibus uigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati nõ sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non

non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio sit subdupla? Idē videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita ut sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, & ob id minimi. Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At uero & A, se ipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se existentes. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit. *23. & 12. septimi*

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E ---

HAEC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, uidelicet ad E; quod quidem fieri posse nusquam demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus hic inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (ut cum dialecticis loquamur) in demōstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, *sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquã concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione ulla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, ut B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi utuntur.*

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nõ tamen deinceps; sintque A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C.

A,4. B,12. C,3. D,9. E ----

Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipsi ostenderũt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdũ. Non ergo fieri potest, ut D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

PRIMVM vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; manifestum est, ex demonstra- 17. noni. *tis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus.*

21.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorũ.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiantur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. sit primum primus. Sunt ergo primi

38. septimi

A, 2. B, 3. C, 5.

30 1

D ------------ E . F

numeri A, B, C, & D F, plures ꝓposita multitudine A, B, C.

SED iam non sit primus D F. Metietur ergo eum aliquis

quis numerus primus, nempe G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui unus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundẽ D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, metietur quoque E F, reliquum, numerus unitatẽ. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui unus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademq; uia plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat. 33. *septimi*

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D -------------- E. F
53
G -------

SCHOLION.

POTERAT *idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.*

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM *si primi quotcunque propositi sint* A, B, C, *inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, nempe* DF, *si primus est, uel certe G. Atque eodem modo quatuor primis alium quintũ, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotcunq; quis uolet, inueniemus.*

THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

SI pares numeri quotcunque componãtur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri AB, BC, CD. Dico & totum compositum AD, parem esse. Cũ enim

enim AB, BC, CD, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B; & F, ipsius BC; & G, ipsius C D. Quoniam igitur est ut AB, ad E; ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper sit proportio dupla.) erit quoque ut A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . C . . . . . . D

E . . . F . . G . . . . .

12. *septimi*

23. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, D E, sint impares; differet quilibet unitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit. Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo unitatum detractarum par: Igitur & totus A E, compositus, par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . C . . . . . . D . . . . E

21. *noni.*

21. *noni.*

24. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totũ A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat unitate a pari, ex definitione; ablata unitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par: Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A.....B...C........E.D

22. *noni.* 21. *noni.*

THEOR. 22. PROPOS. 24. 25.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

Ex pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quã dimidia pars, uel minor. Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A......C......B

SED iam C B, par detractus maior sit, uel minor, dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit ut A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando ut A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo ut A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rursusque permutando, ut A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detraha-

A.......C..D...E.....B
A........D...C..E..B

trahatur, &c. Quod erat ostendendum.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim unitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; erit &

A . . . . C . D . . . . B

24. noni. reliquus A D, par. Dempta ergo unitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, unitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui

A . . . . C . . . . . . D . B

A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur

24. noni. C D; erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem esse. Detracta enim A D, unitate ex impare

A B;

A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus D C, par quoque erit; Ac proinde addita unitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat. 24. noni.

A . D . . . . C . . . . . . B

THEOR. 26. PROPOS. 28. 29.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt unitates. Quare cum B, sit par, cōponetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A; Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat. 21 noni.

A . . . B . . . .
C . . . .

SCHOLION.

EADEM *demonstratione ostendemus & hoc.*

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . . . *B . . . .*
C . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparē numerū multiplicans fecerit aliquē. Factus impar erit.

Ex

Ex impari A, in imparē B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nempe æqualis multitudini unitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerū multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . .

C . . . .

23. noni.

EX CAMPANO.

31. NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

A . . . C . . . .

B . . . .

29. noni. METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cū ponatur par. Est ergo C, par.

32. NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

A . . . C . . . . .

B . . . .

28. noni. METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparē esse. Si enim sit par; erit B, factus ex A, impari in C, parē par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

33. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI impar numerus parem numerū metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiū quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstra-

monstrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A metiatur B, per C; metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac 8. *pron.*
proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, ut ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam uero est ut C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando ut C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B: Est autẽ C, pars ipsius B, denominata ab A, ut ostensum est; erit & dimidiũ ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodẽ A, denominata; Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. 40. *septimi*
Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . C . . . .

B . . . .

THEOR. 29. PROPOS. 31. 34.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C: Dico A, ad C, quoque primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D; qui necessario impar erit: Nam si sit par, cũ metiatur imparem A; erit A, factus ex D, pari in eum 28. *noni.*
numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar est. Quia igitur D, impar parem C, metitur; (est enim C, par, cum dimidiũ habeat B,) metietur quoque numerum B, eius dimidium. 30. *noni.*
Metitur autem & A: Igitur D, ipsos A, B, primos inter se existentes metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est: Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquẽ numerũ primus sit, &c. Quod erat ostẽdendum.

A . . . . . . B . . . .

C . . . . D ----

THEOR.

35. THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM a binario duplorũ unusquisque pariter par est tantum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque sint B,C,D, E. Dico B,C,D,E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita unitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A,B,C,D,E, ab unitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. Quare A, quemlibet ipsorum B,C,D,E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A,B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, utpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B,C,D,E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16. E,32.

11. noni. Q

QVOD autem ijdem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab unitate continue proportionales, sitque A, proximus unitati numerus primus, nempe binarius; nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A,B,C,D,E; qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

13. noni

SCHOLION.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint n. A,B, C, D, E, F, a binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur;

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.
I — H — G —

nentur; Atque adeo si ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum. ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidiæ partis dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars unitas, ita ut sit I, binarius. Igitur H, G, sunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, præter eos, qui a binario sunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33. 36.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem; metietur binarius, numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per pa-

A . . . .

rem

9. pron. rem E. Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium,

19. septimi Ac propterea erit ut C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . .
B . . . . .   C . . .
D -----   E ---

SCHOLION.

Itaque si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantum, constat ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec a binario sint dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed uel esse pariter parem tantum, uel certe pariter parem & pariter imparem.

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

37. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR

PAR numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat A .... parem; metietur cum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidiũ. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostẽdemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nã si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cũ in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem, atque adeo uicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neq; a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat. 29. noni.

SCHOLION.

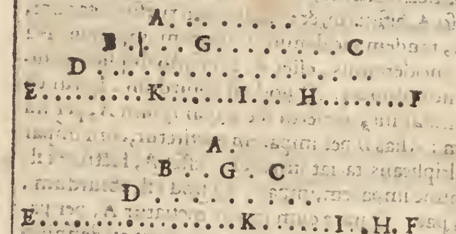
FACILE ex dictis inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secun do, & ultimo æquales ipsi primo: Erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, ultimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse ut B G, ad A; ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniã igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia uero est ut A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque ut E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque ut E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur ut E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I,



12. septimi I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) ut I H, ad H F, hoc est, ut B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum continue proportionalium, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus

quus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium: Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt.

Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota summa. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. *Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi. Id quod ex regula proportionum apud Arithmeticos manifestum est. Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus 2. 2186. Quoniam igitur debet esse ut 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto vltimo; si 1. multiplicetur per 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summa inuenta 1093. procreabitur summa omnium 3280.*

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G —— 62. H,124. I,248. F —— 496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O —— P ——

Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nempe E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, ean-

dem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, ut A, ad D, ita E, ad I; Ac propterea numerus factus ex A, primo
19. septimi in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E; Igitur idem F, fiet ex A, in I;
7. pron. ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F,

Vnitas . A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G ------ 62. H,124. I,248. F ------- 496
K,31. M,31. L,31. N,465.
O ------ P ----.

ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt: Detrahantur ex G, secundo, & ex F, ultimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. Erit
35. noni. igitur ut M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nempe numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex unitate, & A, B, C, D, numeris; (qui compositus eidem E, est æqualis) erit compositus ex L, N, nimirum ipse F, æqualis unitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cũ unitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (cum enim
7. pron. F, factus sit ex E, in D, metietur D, ipsum F; atque adeo
11. pron. eundem F, metietur unitas, & numeri A, B, C, ipsum D, metientes. Rursus cum I, ipsum F, metiatur, ut ostensum est; metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, ipsum I, propter proportionem duplam, metientes) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, ut mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F,
9. pron. per P; atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium; ac propterea est

ut

ut E,ad P,ita O,ad D. Quoniam uero, cum A, B,C,D, ab unitate sint proportionales, & A,proximus unitati, primus; ultimum D, nullus alius, præter A.B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O,ad D,ita erat E, ad P; Neque igitur E, ipsum P, metietur. Existente ergo E,primo, erunt E, & P, inter se primi; ideoque in sua proportione minimi: Ac proinde æque metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. Nullus uero alius præter A,B,C, ipsum D,metitur: Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit idem, qui B, & quot sunt B,C,D,tot ab E, sumantur dupli E,G, H. Erit igitur ex æquo, ut B, ad D, ita E, ad H; Ac proinde idem numerus fiet ex B,primo in H, quartum, qui ex D; secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P,in O. Idem ergo fiet ex P, in O,qui ex B,in H; atque adeo erit ut P,ad B, ita H,ad O. Erat autem P,idem qui B: Igitur & H,idem est,qui O. Quod est absurdum ponitur enim O,diuersus ab omnibus A, B, C, D,E,G,H,I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A,B,C,D,E,G, H, I, metiuntur. Quã ob rem,si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione,&c. Quod erat demonstrandum.

19.septimi *13.octaui* *31.septimi* *23.& 21. septimi* *19.septimi* *19.septimi*

SCHOLION.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas,quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in unam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo,qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa unitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1.2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3 in 2.

vltim ũ

vltimum duplorum; perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At uero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE *quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.*

FINIS ELEMENTI NONI.

a-e^8 A-2S^8 2T^4 (2T4 blank)
A-2O^8 2P^4
2 vols collated & complete
Roger Gaskell 30.vi.03

629